

グリーンの公式による2次元水面波の境界値問題の解析

ANALYSES OF TWO-DIMENSIONAL WAVE PROBLEMS

BY MEANS OF GREEN'S IDENTITY FORMULA

井島 武士*・周 宗 仁**

By Takeshi IJIMA and Chung Ren CHOU

1. 概 要

有限水深域における海底地形の変化による波の変形、固定または浮遊構造物に対する波の作用、透過または不透過な防波堤、潜堤、護岸等による波の制御などの問題は2次元境界値問題として様々な解析法により取り扱われている。対象とする海底地形や物体の形が簡単で規則的な形をもつ場合には、種々の数学的手法を用い数式によりこれを解析することが可能なこともあるが、やや複雑または不規則な形をもつ場合は、数値解析によるほかに、電子計算機の発達に伴い、種々の方法が考案されている。

速度ポテンシャルをもつ波に関する境界値問題の数値解析における最も普遍的な方法の一つはグリーン関数による方法である。たとえば、没水物体に波が入射する場合の境界値問題では、物体領域外の自由表面と水底条件および無限遠における radiation 条件を満足する、単位 source に対するグリーン関数を求めておいて、物体の没水表面での運動学的条件を満足するように source の分布を決め、その和をもって散乱波の速度ポテンシャルとし、これと入射波のポテンシャルを重ねて問題の解を得る。数値計算はこの source の強度分布を決めるための積分方程式を解く際に行われる。すなわち一般のグリーン関数による方法は、(i) 水面の水底条件および radiation 条件を満足するグリーン関数の誘導、(ii) source の分布を規定する積分方程式の数値解の2段階を必要とし、問題の解を得るためには、まずグリーン関数の誘導に成功しなければならない。

本論文はこうしたグリーン関数を用いることなく、グリーンの公式のみによって問題を簡明に解析する方法を示すもので、微小振幅波を対象とする2次元境界値問題

に広く用いることができる(ただし、本文では簡単のため、時間的過渡現象に属する問題は除外する)。

考える2次元閉領域の内部の任意点 (x, z) とその領域を囲む閉曲線 D (境界線) 上の点 (ξ, η) との距離を r とするとき、 $\log(1/r)$ はその領域内でラプラスの方程式を満足する一つの特解である。グリーンの定理によると、このほかにこの領域内でラプラスの方程式を満足する連続な2次導関数をもつポテンシャル関数 $\phi(x, z)$ が存在するならば、それは、 $\log(1/r)$ を用いて、境界線上の値 $\phi(\xi, \eta)$ とその法線微分値 $\partial\phi(\xi, \eta)/\partial\nu$ (ν は境界線に対する法線) とにより一意的に表わすことができる。すなわち、境界線上のポテンシャル関数値とその法線微分値が与えられれば、領域内部のポテンシャル関数値が知れることになる。ゆえに与えられた境界条件を満足するポテンシャル関数を求めることは、境界上の関数値とその法線微分値を求めることと等価であり、問題は $\phi(\xi, \eta)$ と $\partial\phi(\xi, \eta)/\partial\nu$ を求めることに帰着する。

このグリーンの定理を表わす式において、内部の点 (x, z) が境界上の点 (ξ, η) に接近する極限を取ると、 $\log(1/r)$ の性質によって $\phi(\xi, \eta)$ と $\partial\phi(\xi, \eta)/\partial\nu$ との関係を与える一つの線型積分方程式が得られる(本文ではこれをグリーンの公式とよぶことにしている)。そこで境界線 D を小さな要素に分割して、積分方程式を差分方程式に直すと、結局 $\phi(\xi, \eta)$ と $\partial\phi(\xi, \eta)/\partial\nu$ の間の一次方程式が得られる。これは考える領域の形のみによって決まる幾何学的関係式である。

この関係式とは別に、独立に両者の関係を規定する方程式が与えられれば、2つの未知量に対し、2つの方程式が存在することとなり、両者は決まるはずである。

この第2の方程式は、与えられた境界値問題における力学的境界条件により規定される力学的関係式として存在する。微小振幅波の問題ではこの関係は常に1次方程式で与えられるから、前記の幾何学的関係式と共に連立方程式として解けば $\phi(\xi, \eta)$ と $\partial\phi(\xi, \eta)/\partial\nu$ が確定さ

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学教室

** 学生会員 工修 九州大学大学院博士課程

れ、問題の解が得られる。

本論文ではこの原理とその代表的な応用例として、透過性防波堤による波の変形の問題の解析結果を示し、その簡単な場合として取り扱われる護岸、潜堤および海底地形の変化による波の変形などの解析例を述べるものである。

本文はこれらの問題の解析法を示すことに主眼をおき、個々の問題について詳細に論ずることは避ける。

2. グリーンの公式

2次元平面内の閉曲線Dによって囲まれる閉領域内の点(x, z)においてラプラスの方程式を満足するポテンシャル関数φ(x, z)が、その領域内で2次の連続な導関数をもつときは、グリーンの定理により点(x, z)における関数値は、境界上の値φ(ξ, η)と、外向きの法線微分値∂φ(ξ, η)/∂νにより次式のように表わされる¹⁾。

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_D \left[\phi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial(\nu/h_0)} \log(r/h_0) - \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial(\nu/h_0)} \log(r/h_0) \right] \cdot ds/h_0 \dots\dots\dots(1)$$

ここでrは内点(x, z)と境界点(ξ, η)との距離、h₀は閉領域の大きさを代表する一定値(たとえば水深)、νは境界線Dに対する外向き法線、また積分はDに沿う反時計回りの線積分である。

内点(x, z)が境界線上の点(ξ', η')に接近する極限を考えると式(1)により次の積分方程式を得る¹⁾。

$$\phi(\xi', \eta') = \frac{1}{\pi} \int_D \left[\phi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial(\nu/h_0)} \log(R/h_0) - \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial(\nu/h_0)} \log(R/h_0) \right] \cdot ds/h_0 \dots\dots\dots(2)$$

ここでRは点(ξ, η)と(ξ', η')との距離である。

境界線DをN個の点によりN個の小部分に分割し、おのおのの midpoint を(ξ_j, η_j) (j=1~N)、長さをΔs_jとすると式(2)は次の差分方程式で表わされる。

$$\phi(i) = \sum_{j=1}^N (\bar{E}_{ij} \phi(j) - E_{ij} \bar{\phi}(j)), (i=1 \sim N) \dots\dots\dots(3)$$

ここでiおよびjは点(ξ_i, η_i)および(ξ_j, η_j)を表わし、また—(bar)はν/h₀に関する微分を意味する。すなわちφ̄(j)=∂φ(j)/∂(ν/h₀)である。E_{ij}およびĒ_{ij}は次式で示される区間Δs_jについての積分値である。

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= \int_{\Delta s_j} \frac{1}{\pi} \log(R_{ij}/h_0) \cdot ds/h_0 \\ \bar{E}_{ij} &= \int_{\Delta s_j} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial(\nu/h_0)} \log(R_{ij}/h_0) \cdot ds/h_0 \\ R_{ij} &= \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

式(3)は境界上のN個のφおよびN個のφ̄に関するN個の一次方程式である。

内点(x, z)におけるポテンシャル関数値は式(1)により次のように書き表わされる¹⁾。

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\bar{E}_{xj} \phi(j) - E_{xj} \bar{\phi}(j)) \dots\dots\dots(5)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} E_{xj} &= \int_{\Delta s_j} \frac{1}{\pi} \log(r_{xj}/h_0) \cdot ds/h_0 \\ \bar{E}_{xj} &= \int_{\Delta s_j} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial(\nu/h_0)} \log(r_{xj}/h_0) \cdot ds/h_0 \\ r_{xj} &= \sqrt{(\xi_j - x)^2 + (\eta_j - z)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

式(3)で与えられるφとφ̄の関係は、考える領域の形だけによって決まる幾何学的な関係である。

3. 有限水深域の微小振幅波に関する力学的境界条件

ここでは、応用例に関係ある非圧縮性完全流体の運動と、透過性物質内の流体運動について示すことにする。

静水面に座標原点O、水平および鉛直上方にそれぞれx軸とz軸を取り、時間および重力の加速度をtおよびgとして示す。また入射波を振幅ζ₀、周波数σ(=2π/T; Tは波の周期)の正弦波とする。

(1) 非圧縮性、非粘性の波運動

流体運動の速度ポテンシャルをΦ(x, z; t)= $\frac{g\zeta_0}{\sigma}$ φ(x, z)・e^{iσt}とおくと、ポテンシャル関数φ(x, z)は次のラプラスの方程式を満足する。

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0 \dots\dots\dots(7)$$

水平および鉛直流速u, w; 流体圧力p; 水面波形ζは、流体密度をρとして次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{p}{\rho g \zeta_0} = -i \phi(x, z) \cdot e^{i\sigma t} \\ \frac{\zeta}{\zeta_0} &= -i \phi(x, 0) \cdot e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

本文の問題に関係ある境界条件は次のように与えられる。

a) 自由表面条件

水面での圧力一定の条件と運動学的条件とから、表面の境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi \text{ したがって } \bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial(\nu/h_0)} = \frac{\sigma^2 h_0}{g} \phi; (z=0) \dots\dots\dots(9)$$

b) 固定不透過面での条件

固定不透過面では法線流速は0であるから

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ したがって } \bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial(\nu/h_0)} = 0 \dots\dots\dots(10)$$

(2) 空隙物質内の波運動

透過性防波堤や護岸などの空隙物質内での波運動に対しては、流速の平方に比例する抵抗と加速度に比例する抵抗とが作用すると考えられる。前者を流速に比例する抵抗に置き換えてその係数をμ、後者の影響を考慮した

空隙物質の仮想空隙率を V とし、空隙領域の局所空間平均の水平および鉛直流速を u_* および w_* 、流体圧力を p_* 、流体密度を ρ で示すと、連続方程式と水平、鉛直方向の運動方程式はそれぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_*}{\partial x} + \frac{\partial w_*}{\partial z} &= 0 \\ \frac{1}{V} \frac{\partial u_*}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_*}{\partial x} - \frac{\mu}{V} u_* \\ \frac{1}{V} \frac{\partial w_*}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_*}{\partial z} - \frac{\mu}{V} w_* - g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

上式で表わされる流体運動は速度ポテンシャル $\Phi_*(x, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi_*(x, z) \cdot e^{i\sigma t}$ をもち、流速、圧力および水面波形は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_* &= \frac{\partial \Phi_*}{\partial x}, \quad w_* = \frac{\partial \Phi_*}{\partial z}, \quad \frac{p_*}{\rho g \zeta_0} = -i\beta \phi_*(x, z) \cdot e^{i\sigma t} \\ \frac{\zeta_*}{\zeta_0} &= -i\beta \phi_*(x, 0) \cdot e^{i\sigma t}, \quad \text{ただし } \beta = \frac{\alpha}{V}, \quad \alpha = 1 - i \frac{\mu}{\sigma} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

また境界条件は次のように表わされる。

a) 自由表面条件

水面 $z=0$ における圧力一定の条件と運動学的条件 $\partial \zeta_*/\partial t = \partial \Phi_*/\partial z$ とにより、次の条件式が導かれる。

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial z} = \alpha \cdot \frac{\sigma^2}{g} \phi_* \quad \text{したがって} \quad \bar{\phi}_* = \alpha \cdot \frac{\sigma^2 h_0}{g} \phi_* \quad (z=0) \dots\dots\dots(13)$$

b) 固定不透過面での条件

(1) と同じく

$$\frac{\partial \phi_*}{\partial v} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \bar{\phi}_* = 0 \dots\dots\dots(14)$$

上述の条件式は固定境界面に対するものであるが、(1)の場合に境界面が指定された振動を行う場合、あるいは(2)の場合に空隙物質が並進的振動を行う場合にも類似の境界条件が導かれる。

4. 透過性斜面防波堤の解析

Fig. 1 に示すように、入射波側の水深が h 、反対側の水深が h' であるような不透過海底面上に、透過性の防波堤が置かれており、右方から振幅 ζ_0 、周波数 σ の正弦波が入射するものとする。堤体 $ABB'A'$ ののり先点 B, B' を通る幾何学的鉛直面 BC および $B'C'$ により、流体域を、 BC より右側水深 h の領域 (I) および

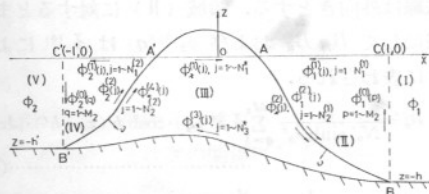


Fig. 1 Definition Sketch for Permeable Sloped-Face Breakwater

$B'C'$ より左側水深 h' の領域 (V); 境界線 $ABCA$ と $A'B'C'A'$ で囲まれる領域 (II) および (IV); $ABB'A'A$ により囲まれる空隙物質部分による領域 (III) に分ける。

(1) 領域 (I) および (V) のポテンシャル関数

一定水深 h の領域 (I) でのポテンシャル関数 $\varphi_1(x, z)$ は次式で与えられる。

$$\varphi_1(x, z) = \{e^{ik(x-l)} + A_0 e^{-ik(x-l)}\} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-k_m(x-l)} \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \dots\dots\dots(15)$$

ここで l は原点 O からの仮想面 BC の距離で k および k_m は次式の根である。

$$kh \tanh kh = -k_m h \tan k_m h = \sigma^2 h/g \quad (m \text{ は整数}) \dots\dots\dots(16)$$

式 (15) の左辺第1項は入射波、第2項は反射波、第3項の級数項は散乱波のポテンシャル関数を表わし A_0, A_m は積分定数である。ゆえに幾何学的境界面 CB 上のポテンシャル関数と x の正方向への法線微分値は次式で与えられる。

$$\varphi_1(l, z) = (1 + A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \dots\dots\dots(17)$$

$$\bar{\varphi}_1(l, z) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial (x/h_0)} = \left[ikh(1 - A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m k_m h \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \right] \cdot \frac{h_0}{h} \dots\dots\dots(18)$$

同様にして領域 (V) のポテンシャル関数、境界面 $C'B'$ 上での値および x の負方向への法線微分値はそれぞれ次のように与えられる。

$$\varphi_2(x, z) = B_0 e^{ik'(x+l')} \frac{\cosh k'(z+h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{k_n'(x+l')} \frac{\cos k_n'(z+h')}{\cos k_n'h'} \dots\dots\dots(19)$$

$$\varphi_2(-l', z) = B_0 \frac{\cosh k'(z+h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cos k_n'(z+h')}{\cos k_n'h'} \dots\dots\dots(20)$$

$$\bar{\varphi}_2(-l', z) = -\frac{h_0}{h'} \left[iB_0 k'h' \frac{\cosh k'(z+h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n'h' \frac{\cos k_n'(z+h')}{\cos k_n'h'} \right] \dots\dots\dots(21)$$

上式で k' および k_n' は次式の根である。

$$k'h' \tanh k'h' = -k_n'h' \tan k_n'h' = \sigma^2 h'/g \quad (n \text{ は整数}) \dots\dots\dots(22)$$

また式 (19) の右辺第1項は通過波、第2項以下は散乱波を表わし、 B_0, B_n は積分定数である。

(2) 領域(II)のポテンシャル関数とグリーンの公式

領域 (II) のポテンシャル関数を ϕ_1 で表わし、境界線 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ および \overrightarrow{BC} を反時計回りにそれぞれ $N_1^{(1)},$

$N_2^{(1)}$, および M_1 個の要素に分割し, それぞれの要素上の中央におけるポテンシャル関数の値を \overline{CA} 上では $\phi_1^{(1)}(j)$, ($j=1\sim N_1^{(1)}$); \overline{AB} 上では $\phi_1^{(2)}(j)$, ($j=1\sim N_2^{(1)}$); \overline{BC} 上では $\phi_1^{(0)}(p)$, ($p=1\sim M_1$) として示す. また境界線での法線は外向きとする.

境界線 \overline{BC} 上では, 領域 (I) と (II) との間の境界面 BC を横切る質量とエネルギー一流束の連続性により, $\bar{\phi}_1(l, z) = \bar{\phi}_1^{(0)}(z)$ および $\phi_1(l, z) = \phi_1^{(0)}(z)$ の関係が成立せねばならない. ゆえに式 (17), (18) により

$$\frac{h_0}{h} \cdot \left[i(1-A_0) \cdot \lambda_0 \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh \lambda_0} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \lambda_m \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos \lambda_m} \right] = \bar{\phi}_1^{(0)}(z) \dots\dots\dots(23)$$

$$(1+A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh \lambda_0} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos \lambda_m} = \phi_1^{(0)}(z) \dots\dots\dots(24)$$

ここで $\lambda_0 = kh$ および $\lambda_m = k_m h$

である. 式 (23) の各項に $\cosh k(z+h)$ または $\cos k_m(z+h)$ を乗じて $z=-h$ から $z=0$ までの積分を行うと, 次式に示すように A_0, A_m は $\bar{\phi}_1^{(0)}$ により表わされる.

$$A_0 = 1 + \frac{i}{N_0 \sinh \lambda_0} \sum_{p=1}^{M_1} \bar{\phi}_1^{(0)}(p) \cdot \cosh k(z_p+h) \cdot (Dz_p/h_0) \dots\dots\dots(25)$$

$$A_m = -\frac{1}{N_m \sin \lambda_m} \sum_{p=1}^{M_1} \bar{\phi}_1^{(0)}(p) \cdot \cos k_m(z_p+h) \cdot (Dz_p/h_0) \dots\dots\dots(26)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} Dz_p &= \frac{1}{2}(z_{p+1} - z_{p-1}) \\ N_0 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_0}{\sinh 2\lambda_0} \right) \\ N_m &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\lambda_m}{\sin 2\lambda_m} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

式 (25), (26) による A_0, A_m を式 (24) に代入すると $\phi_1^{(0)}$ は次式により $\bar{\phi}_1^{(0)}$ で表わされる.

$$\phi_1^{(0)}(p) = 2 \frac{\cosh k(z_p+h)}{\cosh \lambda_0} + \sum_{r=1}^{M_1} f(r:p) \cdot \bar{\phi}_1^{(0)}(r) \cdot (Dz_r/h_0) \dots\dots\dots(28)$$

ここで

$$f(r:p) = i \frac{\cosh k(z_r+h) \cdot \cosh k(z_p+h)}{N_0 \sinh \lambda_0 \cosh \lambda_0} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos k_m(z_r+h) \cdot \cos k_m(z_p+h)}{N_m \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \dots\dots(29)$$

r は p と同じく \overline{BC} 上の要素の位置を示す流動座標である.

自由表面 \overline{CA} 上では, $\bar{\phi}_1^{(1)}(j)$ と $\phi_1^{(1)}(j)$ とは式 (9) の関係にある.

ゆえにグリーンの公式 (3) を領域 (II) に適用すると, 境界線上の点 (i) において次の方程式が得られる.

$$-\phi(i) + \sum_{j=1}^{N_1^{(1)}} \left(\bar{E}_{ij}^{(1,1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1,1)} \right) \phi_1^{(1)}(j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_2^{(1)}} \left(\bar{E}_{ij}^{(1,2)} \phi_1^{(2)}(j) - E_{ij}^{(1,2)} \bar{\phi}_1^{(2)}(j) \right) + \sum_{r=1}^{M_1} F(i, r) \cdot \phi_1^{(0)}(r) = -2 \sum_{r=1}^{M_1} \bar{E}_{ir} \frac{\cosh k(z_r+h)}{\cosh \lambda_0} \dots\dots\dots(30)$$

上式は点 (i) の占める位置によって次のように書かれる.

$$N_1^{(1)} \left\{ \begin{aligned} & -\delta_{ij} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1,1)} \\ & \bar{E}_{ij}^{(1,1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1,1)} \\ & \bar{E}_{pj}^{(1,1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{pj}^{(1,1)} \end{aligned} \right\} \phi_1^{(1)}(j) + N_2^{(1)} \left\{ \begin{aligned} & \bar{E}_{ij}^{(1,2)} \\ & -\delta_{ij} + \bar{E}_{ij}^{(1,2)} \\ & \bar{E}_{pj}^{(1,2)} \end{aligned} \right\} \phi_1^{(2)}(j) - \sum_{j=1}^{N_1^{(1)}} \left\{ \begin{aligned} & E_{ij}^{(1,2)} \\ & \phantom{E_{ij}^{(1,2)}} \\ & E_{pj}^{(1,2)} \end{aligned} \right\} \bar{\phi}_1^{(2)}(j) + \sum_{r=1}^{M_1} \left\{ \begin{aligned} & F(i, r) \\ & \\ & -G(p, r) \end{aligned} \right\} \bar{\phi}_1^{(0)}(r) = 2 \times \left\{ \begin{aligned} & -\sum_{r=1}^{M_1} \bar{E}_{ir} \frac{\cosh k(z_r+h)}{\cosh \lambda_0} \dots\dots i=1\sim N_1^{(1)} \dots\dots(31) \\ & \phantom{-\sum_{r=1}^{M_1} \bar{E}_{ir} \frac{\cosh k(z_r+h)}{\cosh \lambda_0}} \dots\dots i=1\sim N_2^{(1)} \dots\dots(32) \\ & \frac{\cosh k(z_p+h)}{\cosh \lambda_0} \dots\dots i=p=1\sim M_1 \dots\dots(33) \end{aligned} \right.$$

ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタで $\delta_{ij}=1(i=j)$ また $\delta_{ij}=0(i \neq j)$ である. なお

$$\left. \begin{aligned} F(i, r) &= \sum_{p=1}^{M_1} \bar{E}_{ip} f(r:p) \cdot \frac{Dz_r}{h_0} - E_{ir} \\ G(p, r) &= f(r:p) \cdot \frac{Dz_r}{h_0} + E_{pr} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

式 (31) は点 (i) が境界線 \overline{CA} 上にあるとき各項の係数の中の最上段を用いて表わされ, 式 (32) および (33) は点 (i) がそれぞれ境界線 \overline{AB} および \overline{BC} 上にあるとき, 中段および下段の係数を用いて表わされることを示している.

(3) 領域 (IV) のポテンシャル関数とグリーンの公式

領域 (IV) ではポテンシャル関数を ϕ_2 で示し, 境界線 $A'C', C'B'$ および $B'A'$ を反時計回りにそれぞれ $N_1^{(2)}, M_2$, および $N_2^{(2)}$ 個に分割し, 各要素のポテンシャル関数を $\phi_2^{(1)}(j)$, ($j=1\sim N_1^{(2)}$); $\phi_2^{(0)}(q)$, ($q=1\sim M_2$); $\phi_2^{(2)}(j)$, ($j=1\sim N_2^{(2)}$) として示し, また境界の法線は外向きとする. 領域 (II) に対するとまったく同様にして B_0, B_n および $\phi_2^{(0)}(q)$ は $\bar{\phi}_2^{(0)}$ により次のように表わされる.

$$B_0 = \frac{i}{N_0' \sinh \lambda_0'} \sum_{q=1}^{M_2} \bar{\phi}_2^{(0)}(q) \cdot \cosh k'(z_q+h') \cdot |Dz_q/h_0| \dots\dots\dots(35)$$

$$B_n = -\frac{1}{N_n' \sin \lambda_n'} \sum_{q=1}^{M_2} \bar{\phi}_2^{(0)}(q) \cdot \cos k_n'(z_q+h') \cdot |Dz_q/h_0| \dots\dots\dots(36)$$

$$\phi_2^{(0)}(q) = \sum_{s=1}^{M_2} f'(s; q) \cdot \bar{\phi}_2^{(0)}(s) \cdot |dz_s/h_0| \dots\dots\dots(37)$$

ここで

$$f'(s; q) = i \frac{\cosh k'(z_s+h') \cosh k'(z_q+h')}{N_0' \sinh \lambda_0' \cosh \lambda_0'} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos k_n'(z_s+h') \cos k_n'(z_q+h')}{N_n' \sin \lambda_n' \cos \lambda_n'} \dots\dots\dots(38)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0' &= k'h', \quad \lambda_n' = k_n'h' \\ N_0' &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2\lambda_0'}{\sinh 2\lambda_0'} \right) \\ N_n' &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2\lambda_n'}{\sin 2\lambda_n'} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

この領域に対するグリーンの公式は次のようになる。

$$\begin{aligned} -\phi_2(i) + \sum_{j=1}^{N_1^{(2)}} \left(\bar{E}_{ij}^{(2,1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(2,1)} \right) \phi_2^{(1)}(j) \\ + \sum_{j=1}^{N_2^{(2)}} \left(\bar{E}_{ij}^{(2,2)} \phi_2^{(2)}(j) - E_{ij}^{(2,2)} \bar{\phi}_2^{(2)}(j) \right) \\ + \sum_{s=1}^{M_2} F'(i, s) \cdot \bar{\phi}_2^{(0)}(s) = 0 \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

上式は点 (i) の位置により次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \left. \sum_{j=1}^{N_1^{(2)}} \left\{ \begin{aligned} -\delta_{ij} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(2,1)} \\ \bar{E}_{ij}^{(2,1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(2,1)} \\ \bar{E}_{qj}^{(2,1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{qj}^{(2,1)} \end{aligned} \right\} \phi_2^{(1)}(j) \right. \\ + \sum_{j=1}^{N_2^{(2)}} \left\{ \begin{aligned} \bar{E}_{ij}^{(2,2)} \\ -\delta_{ij} + \bar{E}_{ij}^{(2,2)} \\ \bar{E}_{qj}^{(2,2)} \end{aligned} \right\} \phi_2^{(2)}(j) - \sum_{j=1}^{N_2^{(2)}} \left\{ \begin{aligned} E_{ij}^{(2,2)} \\ " \\ E_{qj}^{(2,2)} \end{aligned} \right\} \bar{\phi}_2^{(2)}(j) \\ + \sum_{s=1}^{M_2} \left\{ \begin{aligned} F'(i, s) \\ " \\ -G'(q, s) \end{aligned} \right\} \bar{\phi}_2^{(0)}(s) = 0 \dots\dots\dots(41) \\ \dots\dots\dots(42) \\ \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} F'(i, s) = \sum_{q=1}^{M_2} \bar{E}_{iq} f'(s; q) \cdot \left| \frac{dz_s}{h_0} \right| - E_{is} \\ G'(q, s) = f'(s; q) \cdot \left| \frac{dz_s}{h_0} \right| + E_{qs} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

(4) 領域 (III) におけるポテンシャル関数とグリーン
の公式

領域 (III) におけるポテンシャル関数を ϕ_* として示し、時計回りに境界線 $\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{BB'}$ をそれぞれ N_1^* 個, N_3^* 個に分割し, AB および $B'A'$ は領域 (II) および (IV) に対すると同じくそれぞれ $N_2^{(1)}$ 個, $N_2^{(2)}$ 個に分割し, それぞれの関数値を $\phi_*^{(1)}(j)$, ($j=1 \sim N_1^*$); $\phi_*^{(2)}(j)$, ($j=1 \sim N_3^*$); $\phi_*^{(2)}(j)$, ($j=1 \sim N_2^{(1)}$); $\phi_*^{(4)}(j)$, ($j=1 \sim N_2^{(2)}$) とする。この時境界法線は内向きとする。

自由表面では, 内向き法線であることと式 (13) により $\bar{\phi}_*^{(1)}$ と $\phi_*^{(1)}$ とは次の関係にある。

$$\bar{\phi}_*^{(1)}(j) = -\alpha \frac{\sigma^2 h_0}{g} \phi_*^{(1)}(j) \dots\dots\dots(45)$$

不透水面 $\overrightarrow{BB'}$ では $\bar{\phi}_*^{(3)}(j) = 0$, また領域 (II) およ

び (IV) と接する境界線 \overrightarrow{AB} と $\overrightarrow{B'A'}$ 上では質量とエネルギー流束の連続条件により次の関係がある。

$$\begin{aligned} \beta \phi_*^{(2)} = \bar{\phi}_*^{(2)}, \quad \bar{\phi}_*^{(2)} = \bar{\phi}_*^{(2)}; \\ \text{および } \beta \phi_*^{(4)} = \bar{\phi}_*^{(2)}, \quad \bar{\phi}_*^{(4)} = \bar{\phi}_*^{(2)} \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

式 (45), (46) を考慮すると, この領域に対するグリーン公式は点 (i) の位置により次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \left. \sum_{j=1}^{N_1^*} \left\{ \begin{aligned} \delta_{ij} + \alpha \frac{\sigma^2 h_0}{g} \cdot E_{ij}^{*(1)} \\ \bar{E}_{ij}^{*(1)} + \alpha \frac{\sigma^2 h_0}{g} \cdot E_{ij}^{*(1)} \\ " \\ " \end{aligned} \right\} \phi_*^{(1)}(j) \right. \\ + \sum_{j=1}^{N_3^*} \left\{ \begin{aligned} \bar{E}_{ij}^{*(2)} \\ \delta_{ij} + \bar{E}_{ij}^{*(2)} \\ \bar{E}_{ij}^{*(2)} \\ " \end{aligned} \right\} \phi_*^{(2)}(j) + \sum_{j=1}^{N_2^{(1)}} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\beta} \bar{E}_{ij}^{*(2)} \\ " \\ \frac{1}{\beta} (\delta_{ij} + \bar{E}_{ij}^{*(2)}) \\ \frac{1}{\beta} \bar{E}_{ij}^{*(2)} \end{aligned} \right\} \phi_2^{(2)}(j) \\ - \sum_{j=1}^{N_2^{(1)}} \left\{ \begin{aligned} E_{ij}^{*(2)} \\ " \\ " \\ " \end{aligned} \right\} \bar{\phi}_2^{(2)}(j) + \sum_{j=1}^{N_2^{(2)}} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\beta} \bar{E}_{ij}^{*(4)} \\ " \\ " \\ \frac{1}{\beta} (\delta_{ij} + \bar{E}_{ij}^{*(4)}) \end{aligned} \right\} \phi_2^{(2)}(j) \\ - \sum_{j=1}^{N_2^{(2)}} \left\{ \begin{aligned} E_{ij}^{*(4)} \\ " \\ " \\ " \end{aligned} \right\} \bar{\phi}_2^{(2)}(j) = 0 \dots\dots\dots(47) \\ \dots\dots\dots(48) \\ \dots\dots\dots(49) \\ \dots\dots\dots(50) \end{aligned}$$

(5) 境界線上のポテンシャル関数の決定

式 (31)~(33), (41)~(43), (47)~(50) は $\phi_1^{(1)}$, $\phi_1^{(2)}$, $\bar{\phi}_1^{(2)}$, $\phi_2^{(1)}$, $\phi_2^{(2)}$, $\bar{\phi}_2^{(2)}$, $\phi_*^{(1)}$, $\phi_*^{(2)}$ および $\bar{\phi}_1^{(0)}$, $\bar{\phi}_2^{(0)}$ の総数 ($N_1^{(1)} + 2N_2^{(1)} + N_1^{(2)} + 2N_2^{(2)} + N_1^* + N_3^* + M_1 + M_2$) 個の未知量に関する同数の一次方程式を与える。ゆえにこれらを連立方程式として解けば, すべての未知量が知れ, これから式 (25), (26) により A_0, A_m ; 式 (35), (36) により B_0, B_n ; または式 (28), (37) により $\phi_1^{(0)}$, $\phi_2^{(0)}$ が決まる。

また各領域内でのポテンシャル関数は式 (5) および式 (15), (19) により計算される。

上述の各式における E_{ij} および \bar{E}_{ij} は数値的には式 (4) により次のように計算される²⁾。

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{\pi} \log(R_{ij}/h_0) \cdot (ds_j/h_0) \\ E_{ii} &= \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{ds_i/h_0}{2} - 1 \right) \cdot \frac{ds_i}{h_0} \end{aligned} \right\}$$

$$\phi_*^{(4)}(q) = -\frac{1}{\beta} \sum_{s=1}^{M_2} f'(s; q) \cdot \bar{\phi}_*^{(4)}(s) \cdot \left(\frac{dz_s}{h_0} \right) \Bigg|$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{i}{N_0 \sinh \lambda_0} \sum_{p=1}^{M_1} \bar{\phi}_*^{(3)}(p) \cdot \cosh k(z_p + h) \cdot \left(\frac{dz_p}{h_0} \right) \Bigg| \\ A_m &= \frac{1}{N_m \sin \lambda_m} \sum_{p=1}^{M_1} \bar{\phi}_*^{(2)}(p) \cdot \cos k_m(z_p + h) \cdot \left(\frac{dz_p}{h_0} \right) \Bigg| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{-i}{N'_0 \sinh \lambda'_0} \sum_{s=1}^{M_2} \bar{\phi}_*^{(4)}(q) \cosh k'(z_q + h') \cdot \left(\frac{dz_q}{h_0} \right) \Bigg| \\ B_n &= \frac{1}{N'_n \sin \lambda'_n} \sum_{q=1}^{M_2} \bar{\phi}_*^{(4)}(q) \cos k'_n(z_q + h') \cdot \left(\frac{dz_q}{h_0} \right) \Bigg| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

波の変形および波力については、前節と同様である。

6. 透過性の斜面および直立護岸の解析

Fig. 3 に示すように不透過な斜面 DCB の上に透過性の護岸 AB がある場合は、防波堤と同様に流体域を (I), (II), (III) に分け、それぞれのポテンシャル関数を $\phi(x, z)$, ϕ および ϕ_* で表わすと、領域 (I) の $\phi(x, z)$ は式 (15) で $l=0$ において表わされる。また A_0, A_m は式 (25), (26) で与えられる。領域 (II) に対するグリーンの公式は式 (31)~(33) と同じで、領域 (III) に対する式は式 (47)~(49) の左辺の第 5, 第 6 項を削除して与えられる。反射率 K_r は $|A_0|$, またエネルギー損失率は $K_l^2 = 1 - K_r^2$ で示され、波高分布も式 (54) の第 3~第 5 式で計算される。

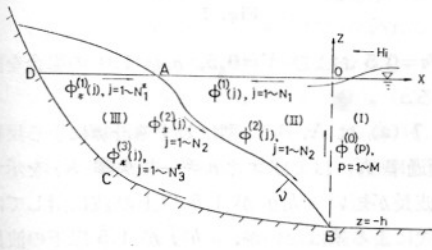


Fig. 3 Definition Sketch for Permeable Sloped-Face Seawall

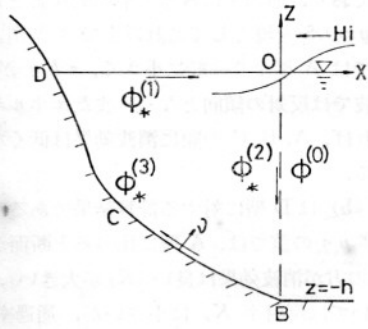


Fig. 4 Definition Sketch for Permeable Vertical-Face Seawall

Fig. 4 のような直立護岸の場合は、式 (56)~(58) の左辺第 4 項を削除して計算すれば良い。

7. 水底および汀線断面の変化

ある範囲にわたって水底の形状が変化する場合の波の変形は、5. で示した Fig. 2 の直立防波堤が存在しない場合に対応し、これは式 (56)~(59) において $V=1.0, \mu/\sigma=0$ すなわち $\alpha=1, \beta=1$ とおけばよい。

同様に汀線の断面形状が不規則な形で変化する場合は 6. で示した Fig. 4 において $V=1.0, \mu/\sigma=0$ とおけば良い。あるいは Fig. 3 における境界面 AB が不透過の場合と考え、式 (31)~(33) で左辺第 3 項を削除すれば良い。

8. 透過性潜堤の解析

Fig. 1 に示した防波堤の代わりに、Fig. 5 のように不透過な海底面に CDE で示す潜堤がある場合には、図のように領域 (I)~(IV) を考えると、領域 (I) および (IV) のポテンシャル関数は式 (15), (19) で与えられる。領域 (II) および (III) のポテンシャル関数をそれぞれ ϕ, ϕ_* で示し、各境界線上の値を $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)}$, および $\phi_*^{(1)}, \phi_*^{(2)}$ で示すと、領域 (II) に対するグリーンの公式は次のようである。

$$\sum_{j=1}^{N_1} \begin{pmatrix} -\delta_{ij} \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1)} \\ \bar{E}_{ij}^{(1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{ij}^{(1)} \\ \bar{E}_{pj}^{(1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{pj}^{(1)} \\ \bar{E}_{qj}^{(1)} - \frac{\sigma^2 h_0}{g} E_{qj}^{(1)} \end{pmatrix} \left\{ \phi^{(1)}(j) + \sum_{j=1}^{N_2} \begin{pmatrix} \bar{E}_{ij}^{(2)} \\ -\delta_{ij} + \bar{E}_{ij}^{(2)} \\ \bar{E}_{pj}^{(2)} \\ \bar{E}_{qj}^{(2)} \end{pmatrix} \right\} \phi^{(2)}(j)$$

$$- \sum_{j=1}^{N_1} \begin{pmatrix} E_{ij}^{(2)} \\ " \\ \bar{E}_{pj}^{(2)} \\ E_{qj}^{(2)} \end{pmatrix} \left\{ \bar{\phi}^{(2)}(j) + \sum_{r=1}^{M_1} \begin{pmatrix} F(i, r) \\ " \\ -G(p, r) \\ F(q, r) \end{pmatrix} \right\} \bar{\phi}_1^{(0)}(r)$$

$$+ \sum_{s=1}^{M_2} \begin{pmatrix} F'(i, s) \\ " \\ F'(p, s) \\ -G'(q, s) \end{pmatrix} \bar{\phi}_2^{(0)}(s)$$

$$= 2 \times \begin{cases} -\sum_{r=1}^{M_1} \frac{\bar{E}_{ir} \cosh k(z_r + h)}{\cosh \lambda_0} \dots i=1 \sim N_1 \dots\dots\dots (64) \\ " \dots i=1 \sim N_2 \dots\dots\dots (65) \\ \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh \lambda_0} \dots i=p=1 \sim M_1 \dots\dots\dots (66) \\ -\sum_{r=1}^{M_1} \frac{\bar{E}_{qr} \cosh k(z_r + h)}{\cosh \lambda_0} \dots i=q=1 \sim M_2 \dots\dots\dots (67) \end{cases}$$

上式で $F(i, r), G(p, r), F'(i, s), G'(q, s)$ は式 (34), (44) で示されている。

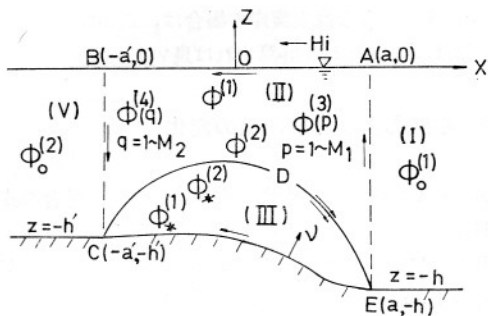


Fig. 5 Definition Sketch for Permeable Submerged Breakwater

領域 (III) に対しては次のようである。

$$N_1 \sum_{j=1}^{N_1} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} + \bar{E}_{ij}^{*(1)} \\ \bar{E}_{ij}^{*(1)} \end{array} \right\} \phi_{s}^{(1)}(j) + \sum_{j=1}^{N_2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\beta} \bar{E}_{ij}^{*(2)} \\ \frac{1}{\beta} (\delta_{ij} + \bar{E}_{ij}^{*(2)}) \end{array} \right\} \phi^{(2)}(j)$$

$$- \sum_{j=1}^{N_2} \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_{ij}^{*(2)} \\ n \end{array} \right\} \bar{\phi}^{(2)}(j) = 0 \quad \dots \dots i=1 \sim N_1 \dots \dots (68)$$

$$\dots \dots i=1 \sim N_2 \dots \dots (69)$$

式 (64)~(69) を連立方程式として解けば良い。波の変形または波力については防波堤の場合と同様である。

9. 計算および結果

(1) 透過性斜面防波堤

Fig. 6 (a), (b), (c), (d) に示すように、水面での堤幅 B が水深 h に等しく、前後の斜面勾配が 1:1.5 の断面をもつ堤体が一定水深 h の場所にある場合 (A 型)、同じ断面が前面水深 h 、背後水深 $h'=0.5h$ の海底上にある場合 (B 型)、海底が水面から $0.4h$ の深さで幅 $0.6h$ 、勾配 1:1.5 の台形の core をなす場合 (C 型) および A 型の断面が大きくなり $B=1.6h$ で斜面勾配が 1:1.3 の場合 (D 型) を考える。図の数字は、各境界線上の計算点の数を示している。式 (15) および (19) の級数項は $m=1 \sim 9$ まで、 $n=1 \sim 9$ までを取ることとし、A, B, C 型に対しては堤体の仮想空隙率 $V=0.5$ 、抵抗係数 $\mu/\sigma=1.0$ とおき、D 型に対しては $V=$

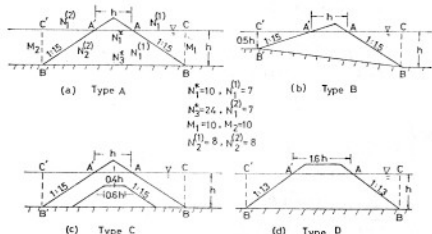
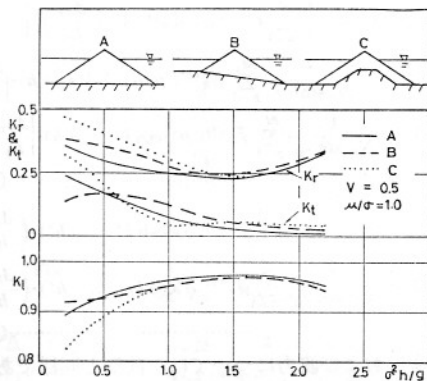
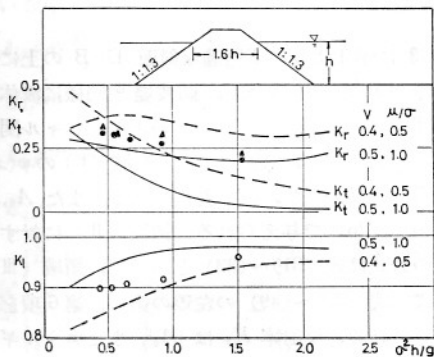


Fig. 6 Calculated Cross-Section of Permeable Breakwater of Sloped Faces



(a) K_r , K_t and K_f for Breakwater with Sloped-Faces



(b) K_r , K_t and K_f for Breakwater with Sloped-Faces
(●: K_r , ▲: K_t measured by Hattori and Sakai (1973) for $H/L=0.03$)

Fig. 7

0.4, $\mu/\sigma=0.5$ および $V=0.5$, $\mu/\sigma=1.0$ の場合を計算している。

Fig. 7 (a) は A, B, C 型に対する計算による反射率 K_r 、通過率 K_t およびエネルギー損失率 K_f を示すもので、波長が短い $\sigma^2 h/g$ が 1.5 以上の波に対しては 3 つの形式による差はないが、 $\sigma^2 h/g$ が 1.5 以下の波長の波に対してそれぞれの形式による差が現われる。反射率は C, B, A の順に大きく、海底斜面と core の反射効果が現われており、通過率は A 型を平均的な値とし、B 型では $\sigma^2 h/g=0.5$ を境としてこれ以上では A 型より大きく、C 型では A 型より一般に小さく、 $\sigma^2 h/g$ が 0.4 より小さい波では反対の傾向となる。またエネルギー損失率から見れば、A, B, C の順に消波効果は低くなることが知られる。

Fig. 7 (b) は D 型に対する計算結果であるが、同じ V および μ/σ の値では、A 型に比べると断面が大きいため D 型の方が消波効果は良い (K_f が大きい)。ただし D 型においては反射率 K_r は小さいが、通過率 K_t が幾分大きくなる。 $V=0.4$, $\mu/\sigma=0.5$ とした場合 (破線) には反射率、通過率ともかなり大きい値を示すように

る。著者 (1971)³⁾ の研究では空隙率 V の増加 (または減少) は反射率を低下 (または増大) するが、通過率にはそれほど大きく影響しないし、一方、抵抗 μ/σ の増加 (または減少) は通過率を著しく低下 (または増大) するが反射率に対する影響は小さいという傾向があり、この場合にも空隙率の減少が反射を増大し、抵抗の減少が通過率を増大している。図中に、服部・堺 (1973)⁴⁾ による同じ形の断面に対する実験値の中で $H_i/L \approx 0.03$ に相当するものをプロットしている (実験では $h=38.1$ cm, $B=61.4$ cm で、堤体は 7.8×9.3 cm のブロックにより作られ見掛けの空隙率は 0.5 である)。

$\sigma^2 h/g$ に関する K_r および K_t の傾向を表すためには V および μ/σ の値を $\sigma^2 h/g$ の関数として表示するのが妥当であり、これらの関係については、種々の方法で研究が行われており、定常流による抵抗の測定値と Lorentz の Equivalent work の仮定により μ/σ を求める方法が一般に考えられる。しかしこのほかに仮想空隙率 V の評価もまた必要である。これらの点についてはいまだ定式化されたものがない。著者 (1971)³⁾ の研究では防波堤の場合、 $\sigma^2 h/g \approx 1.0$ に対しては $\mu/\sigma = 1.0$ が妥当で、 $\sigma^2 h/g > 1.0$ においては $\mu/\sigma < 1.0$, $\sigma^2 h/g < 1.0$ に対しては $\mu/\sigma > 1.0$ が大体妥当な結果を与えると考えられる。 V は実験の空隙率よりも小さく取るのが適当である。本論文の計算では便宜上両者は $\sigma^2 h/g$ に関係せず一定として取り扱ってある (もちろんこのほかに実験には斜面上の碎波による反射率および通過率の低下の影響が入るが、それは本論文には考えていない)。

次に式 (53) による防波堤付近の波高分布を、A, C および D 型について示すと Fig. 8 (a), (b), (c) のようである。いずれの場合にも堤の前斜面に波高の低い部分 (節) があり、静水面と斜面の交点付近で波高は急増し、

堤体内では指数関数的に減衰することになる。特徴的なことは、Fig. 7 から分るように、A 型と D 型ではかなりの堤幅の相違があるにもかかわらず、通過率とエネルギー損失率にはほとんど差がなく、ある程度以上の堤幅になると、それに伴うだけの消波効果が現われなくなることが示唆される。また core のある防波堤 (C 型) では波長の長い波に対しては反射率も通過率もともにかかなり大きく、消波効果は低下することが示される。

Fig. 9 は式 (5) および式 (15), (19) により、 $\sigma^2 h/g = 0.6$ の波による A 型の防波堤における速度ポテンシャルの分布を計算し、等ポテンシャル線 (実線) とそれに直交する流線の分布を、(a) $at=0^\circ$, (b) $at=30^\circ$, (c) $at=60^\circ$, (d) $at=90^\circ$ の各時刻につき示したもので、数字はポテンシャルの値である。これによると波峰が防波堤に接近すると、堤体を通じて上向きの流れが堤内静水面付近に集中し、波の進行とともにその集中点が前進して行くことが分る。

Fig. 10 は同様にして core をもつ C 型の防波堤に対するポテンシャルと流線分布を示すもので、堤頂付近に集中する上向きの流れが core のために強められていることが分る。

上記のような流れの分布は堤体に対する波の作用を理解するに有効である。

(2) 直立透過防波堤

Fig. 11 に示すように堤幅 B が前面水深 h と等しい場合 ($B=h$) と $B=2h$ の場合に、水深が一定で h のときと背後水深が $0.5h$ のときについて、図のように計算点数をとり、反射率 K_r 、通過率 K_t およびエネルギー損失率 K_l を示すと Fig. 12 のようである。図中実線は一定水深、破線は $h'=0.5h$ の場合に対応する。前者の場合の計算値は速度ポテンシャルの接続法による著者 (1971)³⁾ の計算値と一致し、本計算に誤りはないことがわかる。

背後水深が浅くなると K_r, K_t はともに一定水深の場合より大きく、 K_l は小さい。これは水底斜面による波の反射と水深減少による浅水係数の増加によるもので、なお堤体断面積の減少により K_l が小さくなることを示している。

(3) 透過性傾斜または直立護岸

Fig. 13 に示すように不透過な直立壁と一定水深 h の海底面上に、水面での幅 $B=h$ および $2h$, 勾配が 1:0 (直立), 1:1 および 1:2 の斜面をもつ護岸について、図に示すように計算点数をとり、 $V=0.5$, $\mu/\sigma=1.0$ として計算した結果を反射率 K_r 、エネルギー損失率 K_l について示すと、Fig. 14 のようである。図中の実線は

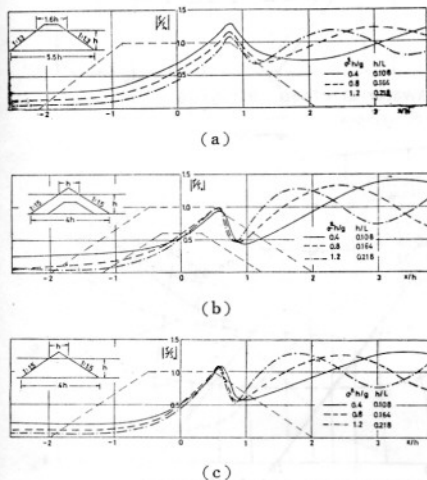
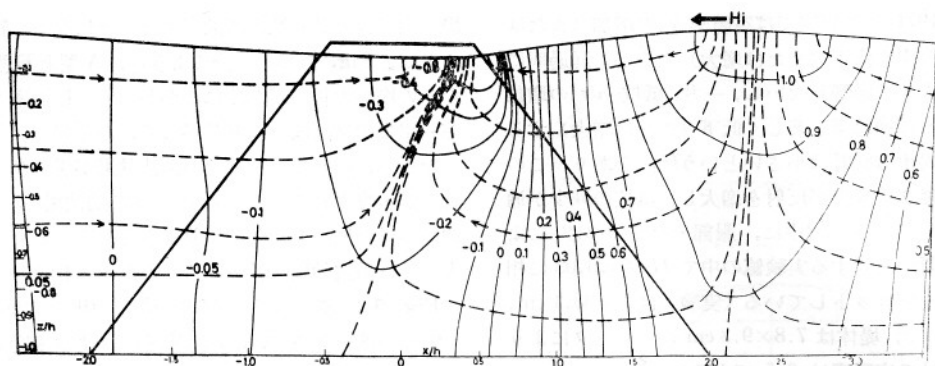
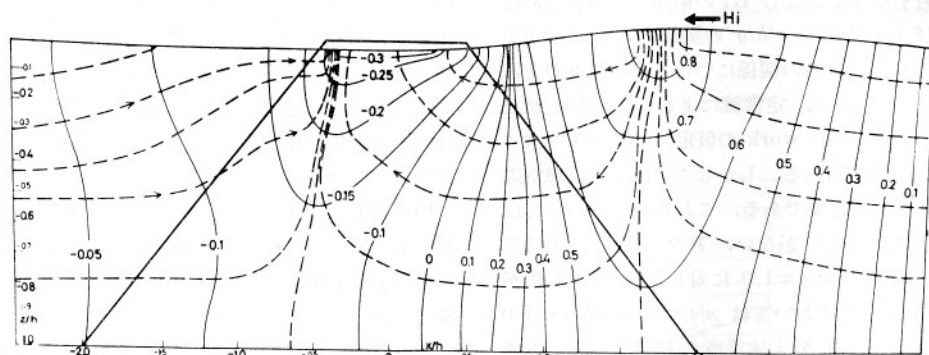


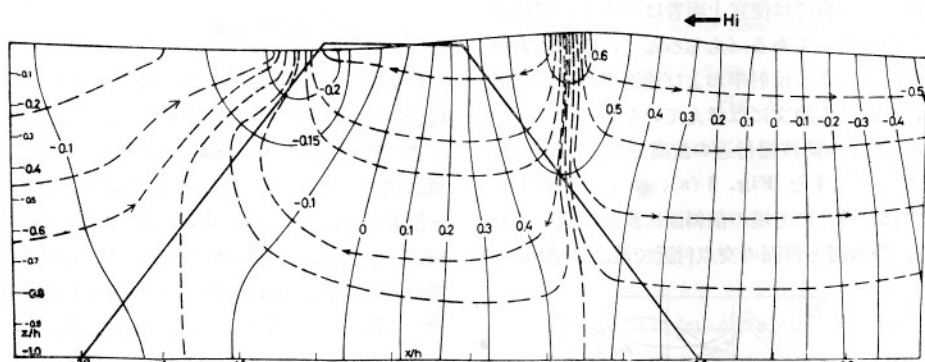
Fig. 8 Wave Height Distribution around Breakwater ($V=0.5$, $\mu/\sigma=1.0$)



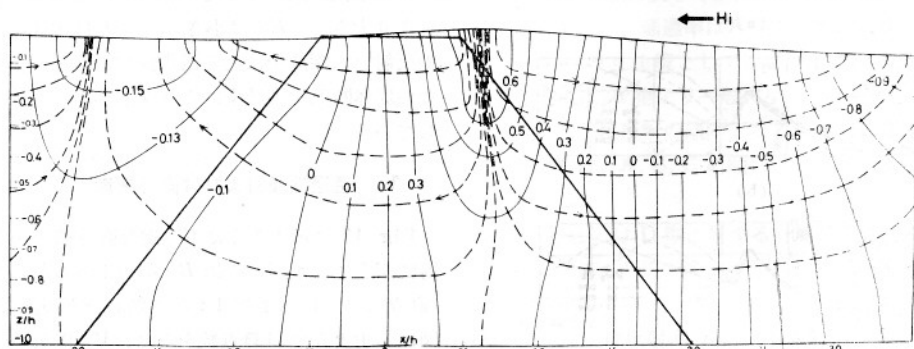
a Distribution of Velocity Potentials for Type A Breakwater at $\alpha t = 0^\circ$, $\sigma^2 h/g = 0.6$



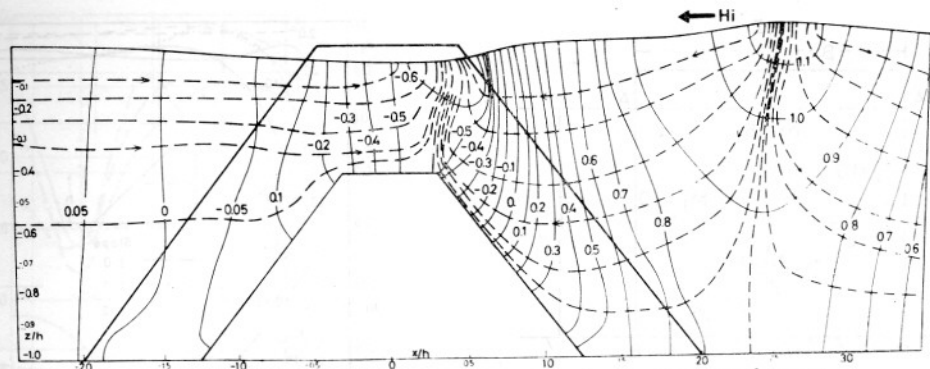
b Distribution of Velocity Potentials for Type A Breakwater at $\alpha t = 30^\circ$, $\sigma^2 h/g = 0.6$



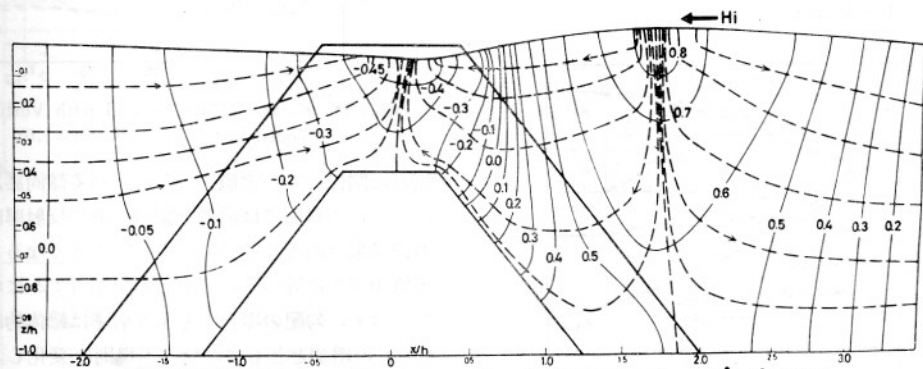
c Distribution of Velocity Potentials for Type A Breakwater at $\alpha t = 60^\circ$, $\sigma^2 h/g = 0.6$



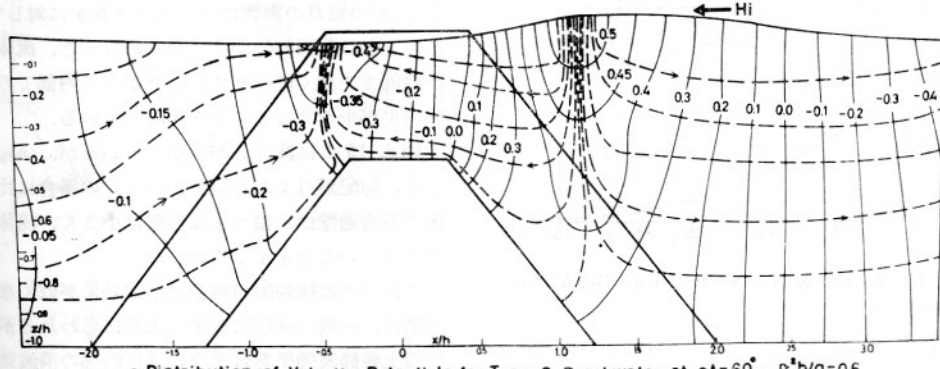
d Distribution of Velocity Potentials for Type A Breakwater at $\alpha t = 90^\circ$, $\sigma^2 h/g = 0.6$



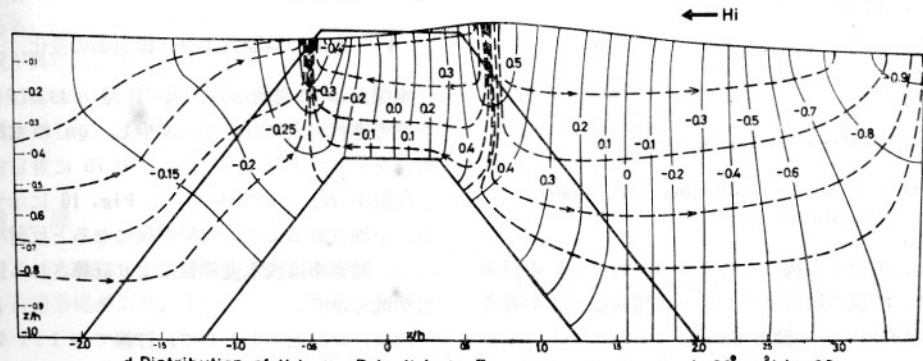
a Distribution of Velocity Potentials for Type C Breakwater at $\alpha t = 0^\circ$, $\sigma^2 h/g = 0.6$



b Distribution of Velocity Potentials for Type C Breakwater at $\alpha t = 30^\circ$, $\sigma^2 h/g = 0.6$



c Distribution of Velocity Potentials for Type C Breakwater at $\alpha t = 60^\circ$, $\sigma^2 h/g = 0.6$



d Distribution of Velocity Potentials for Type C Breakwater at $\alpha t = 90^\circ$, $\sigma^2 h/g = 0.6$

Fig. 10

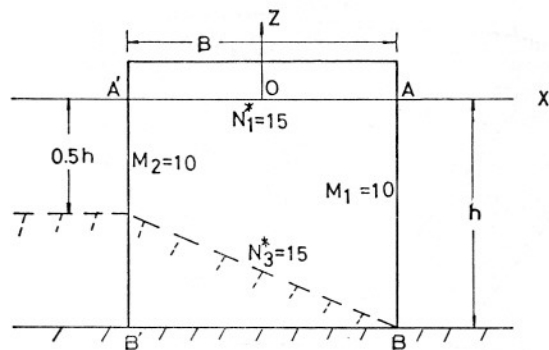


Fig. 11 Calculated Cross-Section of Vertical-Face Breakwater

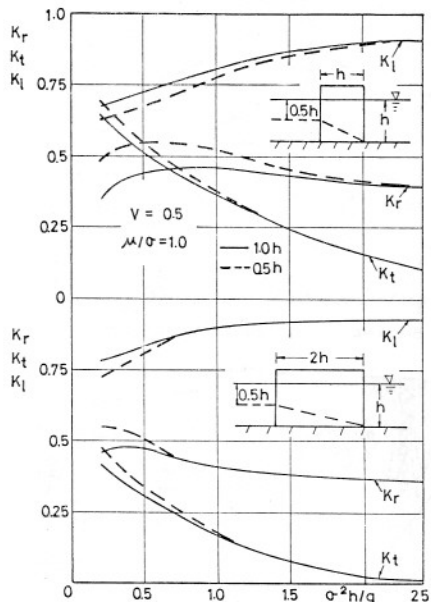


Fig. 12 K_r , K_t and K_l for Vertical-Face Breakwater

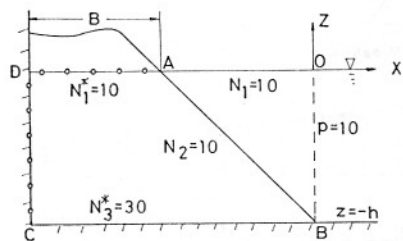


Fig. 13 Calculated Cross-Section of Permeable Sloped-Face Seawall

直立の場合、破線と点線はそれぞれ 1:1, 1:2 の斜面に対応する。実線の値はポテンシャル接続法による著者の計算値 (1971)³⁾ と一致している。

直立護岸の場合は、幅 B が広くなると $\sigma^2 h/g$ の小さい波に対し反射率は著しく低く、 $\sigma^2 h/g$ が大きくなると

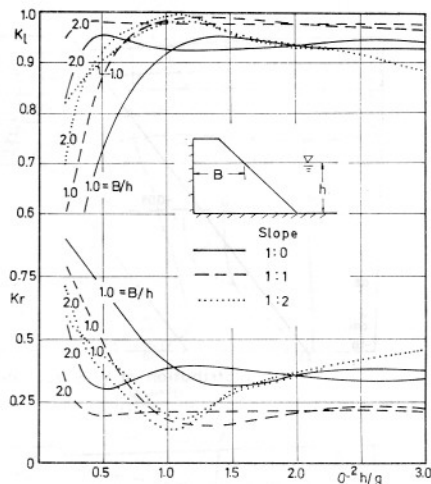


Fig. 14 K_r and K_l for Seawall with Vertical and Sloped Faces ($V=0.5$, $\mu/\sigma=1.0$)

幅 B に関係なく一定値 0.35 に近づく傾向にある。勾配が 1:1 の斜面では前者と類似の形で反射率は低下し、消波効果は高くなるが、 $\sigma^2 h/g$ が大きくなるとともに一定値 0.22 に近づく。しかし勾配が 1:2 になると、むしろ 1:1 勾配の場合よりも反射率は総体的に大きく、 $\sigma^2 h/g$ の増加とともにかなり不規則に変化し、 $\sigma^2 h/g$ の大きい所では、反射率はかえて前の 2 つの場合より大きく、かつ幅 B の影響はすべての $\sigma^2 h/g$ に対して小さい。このことは斜面勾配が余り緩かになると、流体運動が護岸内部まで深く浸透せず、したがって内部でのエネルギー消失が少なくなることを示唆している。

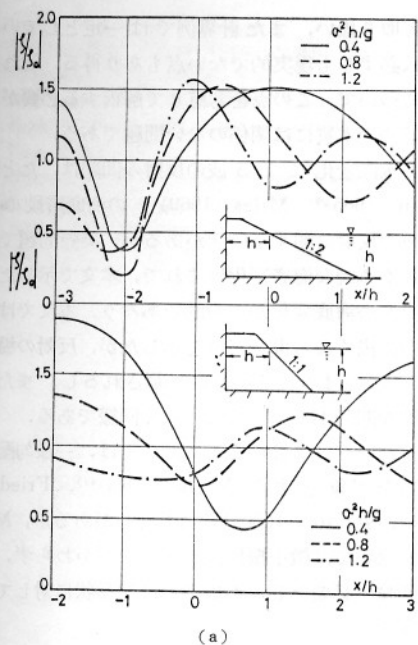
Fig. 15 には波高分布を示しているが、(a), (b) 両図とも、勾配が 1:2 の場合が 1:1 の場合に比べて、背後の不透過壁面に沿う水面変動は小さく、流体運動が活発ではないことを示している。

このように緩勾配の場合に消波効果が低くなるという結果は、一般の経験に反すると思われるが、これは斜面上の碎波効果を含まない護岸内部の消波効果だけを比較しているからである。

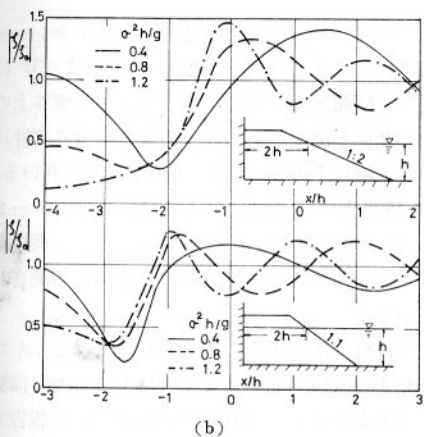
(4) 水底の斜面および汀線断面の変化

水深が h の場所から、水平距離 h および $2h$ の区間で波の進行方向に直線的に減少し、 qh の水深に変わる場合を、 $q=0.25, 0.50$ および 0.75 に対して計算すると反射率 K_r と通過率 K_t は Fig. 16 に示すようになる。予期されるように勾配が緩になると反射率は小さくなる。通過率は浅水度係数により計算される値よりも、当然低くなる。

次に汀線断面の形として、汀線での 1:1 勾配に続いて深さ $0.5h$ 、長さ $2h$ の平坦部があって、さらに 1:1 勾配で水深 h に接続する場合と、平坦部の長さが $3h$



(a)



(b)

Fig. 15 Wave Height Distribution for Sloped-Face Seawall ($V=0.5$, $\mu/\sigma=1.0$)

で勾配が 1:1 および 1:2 の場合について計算し、おのおの場合の波高分布を示すと Fig. 17 (a), (b), (c) のようである。汀線勾配と平坦部の長さにより、腹および節の位置が異なり、腹における波高も異なる。(a) の場合は $\sigma^2 h/g \approx 0.8$, (b) の場合 $\sigma^2 h/g \approx 0.5$, (c) の場合 $\sigma^2 h/g \approx 0.2$ に対して、平坦部の波高は最大で入射波の約 2.5 倍に達する。

(5) 潜堤

水深一定 h の海底に、底面の幅 B , 上面の幅 $0.6B$ の台形の不透過潜堤があり、上面の深さが qh ($1 > q > 0$) とする。

$B=h, 1.5h, 2h$, $q=0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ としたときの反射率を計算すると Fig. 18 (a), (b), (c) のよう

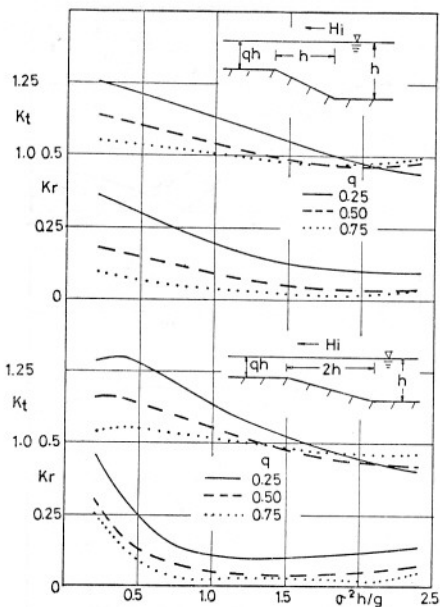
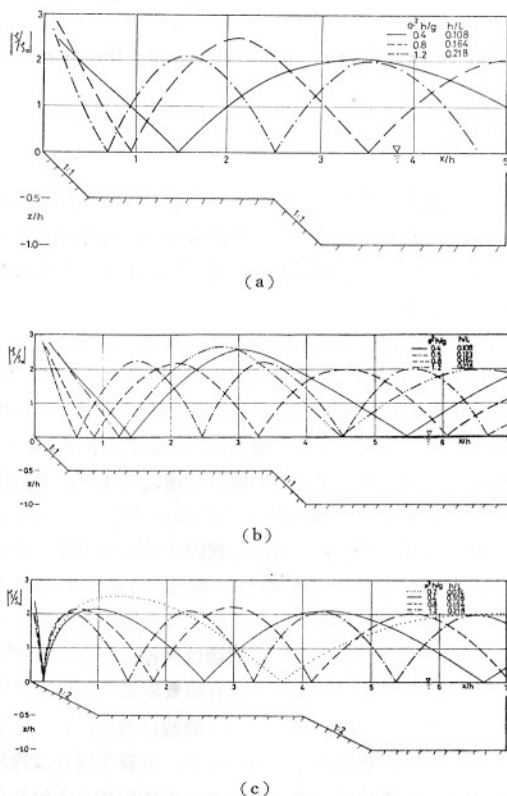


Fig. 16 K_r and K_t for Underwater Slopes



(a)

(b)

(c)

Fig. 17 Wave Height Distribution on Beach Step

ある。各図において特徴的なことは台形の上面幅と深さによって、反射率 0 の状態が表われることで、この様子は著者 (1971)⁵⁾ の矩形潜堤におけると類似である。

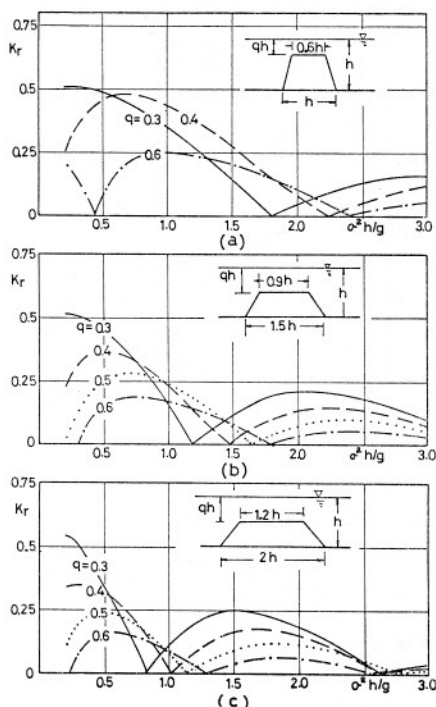


Fig. 18 K_r of Impermeable Submerged Breakwater

10. むすび

以上の諸計算においては、境界の形が直線的なものについての例を示したが、これらはもちろん直線である必要はなく、むしろ不規則な形に対して、本文の方法は最も有効である。

透過性構造物に関する問題点は、流速の平方に比例する抵抗の項を線型化する方法で、Sollitt (1972)⁹⁾、Madsen (1974)⁷⁾ などのように、堤体内のエネルギー損失量を等からしめるように線型抵抗の係数を決めるのが一般的な方法であるが、その他に加速度に比例する抵抗の仮想質量係数を見積らねばならないという問題もある。直立防波堤では波の変形に起因する砕波を伴わないから、この問題は比較的容易に解決できるかも知れない。しかし斜面防波堤では、斜面上での波の変形による砕波を伴う場合が多いから、問題は複雑になる。たとえば McCorquodale (1972)⁸⁾ は有限要素法を用いて、堤体内でのこれらの抵抗（もちろん砕波は考えない）を表示した形での計算例を示しているが、計算手続きは複雑でかなりの計算時間を要し、種々の堤体形状と入射波条件についてそれぞれの解を求めていくことは實際上困難であり、またその計算結果は必ずしも、より妥当なものとは限らない。したがって本論文では差し当りこれらの影響を仮想空隙率 V と抵抗係数 μ/σ の中に含ませたも

のとして取り扱い、また計算例では一定としているから、解は必ずしも現実的でない点もあり得る。それぞれの問題について、この点を考慮して解釈する必要があるが、計算法の本質には関係のない問題である。

海底の水深変化による波の反射の問題は、たとえば Newman (1965)⁹⁾、Miles (1969)¹⁰⁾ の海底階段 (step) による波の反射に関する研究があるが、実際問題ではこのような不連続な海底変化はまれで、本文で示したような傾斜をもつ海底変化が一般的であろう。本文では波の進行方向に浅くなる場合だけを示したが、反対の場合は $q > 1$ としてまったく同様に計算されるし、また海底に不規則な凹凸があってもまったく同様である。

海岸汀線における波の変化に関しては、一様勾配の海岸での波を対象とする Miche (1944)¹¹⁾、Friedrichs (1948)¹²⁾、Issacson (1950)¹³⁾ らの研究があるが、Miche の研究を除いては微小振幅波であるにかかわらず、複雑な解析理論を必要とし、不規則な汀線形状に対しては適用されない。

以上要するに与えられた領域内で速度ポテンシャルをもつ微小振幅である限り、グリーンの公式 (3) によって、考える閉領域の形だけによって、その境界上の ϕ と $\bar{\phi}$ の線型関係が決まり、これを力学的な境界条件により規定される境界上の ϕ と $\bar{\phi}$ の線型関係に用いると、 ϕ と $\bar{\phi}$ が境界上で一意的に決まる。そこでグリーンの定理 (5) によって領域内の ϕ も決まるという簡単な原理によって、いろいろの境界値問題が容易に解決されることがわかる。

本文では境界面が固定している場合だけを示したが、正弦運動を行う境界面がある場合にもまったく同様にして解くことができる。これらについては次の報告で示すことにする。

本文の計算法の検討と具体的計算の実行には、本学水工土木学専攻博士課程 吉田明徳、水工土木学教室研究補助員 湯村やす両氏の協力を得た。ここに両氏に対して謝意を表わす。

参考文献

- 1) 宇野利雄・洪植雄：ポテンシャル，培風館，1961.
- 2) 井島・湯村・周・吉田：水底及び水面付近の任意断面の固定柱状体による波の散乱と波力，土木学会論文報告集第 228 号，1974 年 8 月.
- 3) 井島・江口・小林：透過性防波堤と岸壁に関する研究，土木学会第 18 回海岸工学講演会論文集，1971 年.
- 4) 服部昌太郎・堺利雄：ブロック積み防波堤の波高伝達率に関する実験的研究，土木学会第 20 回海岸工学講演会論文集，1973 年.
- 5) 井島・佐々木：潜堤の効果に関する理論的研究，土木学会第 18 回海岸工学講演会論文集，1971 年.
- 6) Sollitt, C.K.: Wave Transmission through Permeable Breakwaters, Proc. 13th International Conf. on

Coastal Eng. ASCE, 1972.

- 7) Madsen, O.S. : Wave Transmission through Porous Structures, Proc. ASCE, Vol. 100, No. WW 3, 1974.
- 8) McCorquodale, J.A. : Wave Energy Dissipation in Rockfill, Proc. 13th International Conf. on Coastal Eng. ASCE, 1972.
- 9) Newman, J.N. : Propagation of Water Waves over an Infinite Step, J.F.M. Vol. 23, Part 2, 1965.
- 10) Miles, J.W. : Surface Wave Scattering Matrix for a Shelf, J.F.M. Vol. 28, Part 4, 1969.

- 11) Miche, M. : Mouvements Ondulatoires de la Mer en Profondeur Constante ou Decroissante, Annales des Ponts et Chaussées, Vol. 14, pp. 131~164, 1944.
- 12) Friedrichs, K.O. : Water Waves on a Shallow Sloping Beach, Comm. Pure and Applied Math. Vol. 1, pp. 109~134, 1948.
- 13) Issacson, E. : Water Waves on Sloping Bottom, Comm. Pure and Applied Math. Vol. 3, pp. 1~32, 1950.

(1975.10.22・受付)