

沒水結構物對孤立波變形影響之數值研究

周宗仁¹ 陳明宗²

摘要

沒水結構物在沒水深度較小時，波浪在沒水結構物上之運動為非線性及產生較高次簡諧作用，結果造成傳遞波之分裂與變形。本研究以數值計算沒水結構物設置深度不同來探討孤立波通過結構物時波浪之分裂及變形。以邊界元素法建立模擬非線性造波問題之數值模式，利用 Lagrange 法描述流體運動同時配合時間差分觀念，考量自由水面之非線形條件，以虛擬活塞式造波機模擬孤立波經過沒水結構物時波浪的傳遞及變形。

Numerical Analysis of Wave Deformation between Solitary Wave and a Submerged Structure

Chung-Ren Chou¹ Ming-Tzong Chen²

ABSTRACT

Since wave motion over a structure placed at small submergence depth is highly nonlinear, higher harmonic generation usually occurs, resulting in wave breaking or deformation onto submerged structure. The main objective of this study is present a numerical solution for solitary wave interactions with a submerged structure. It will describe transmission and deformation of the interactions. This study investigates a numerical simulation of two-dimensional wave making problem by means of boundary element method. The numerical scheme is based on the lagrangian description together with finite differencing of the time derivative. An algorithm to generate waves with any nonlinear form was also implanted in the scheme, as the pseudo boundary is assumed to represent a piston wave generator device, it is clear that paddle of any desire type can be simulated.

1. 緒論

波浪與沒水結構物之相互作用在理論與實驗方面曾經被廣泛討論過，乃因沒水結構物適合作為海岸地質軟弱地方之防波堤、離岸堤，以使遮蔽之水域得到較佳靜穩度，並可大量節省工程經費。以往大部份之研究皆在探討線性波通過沒水結構物後之反射(reflection)及透過(transmission)問題(Ijima et al, 1970; 周等 1987)。沒水結構物在沒

水深度較小時，波浪在沒水結構物上之運動為非線性(nonlinear)及產生較高次簡諧作用(harmonic generation)，結果造成傳遞波之分裂與變形(Kojima et al, 1990)。往昔學者較少探討非線性波與沒水結構物之相互作用及通過結構物波浪之變形。本文主要旨在研究非線性波通過沒水結構物之波浪變形行為。

波浪理論中，微小振幅波(small amplitude wave)之波形方程式不考量非線性條件，當波浪尖銳度較大及波浪與水深之比不能視為微小量時，須考量自由水面邊界之非線形條件，當水深極淺

1. 國立台灣海洋大學河海工程系教授

2. 國立台灣海洋大學河海工程系博士班研究生，私立東南工專土木科講師

小於 0.1 波長時，為能更精確描述淺海附近實際波浪之物理現象，則須以孤立波(solitary wave)理論加以分析。本研究以邊界元素法建立孤立波造波問題之數值模式，以 Lagrange 法描述流體運動同時配合時間差分觀念解析二維波浪之造波、傳遞與變形問題，於虛擬造波邊界導入各種造波條件，即可藉由數值模式來模擬造波水槽之各種造波問題。解析時採用活塞式造波機(piston type wave generator)之造波條件，模擬活塞式造波機之造波過程，並考量自由水面之非線性條件(周等,1997)。

2. 理論分析

2.1 基本假設

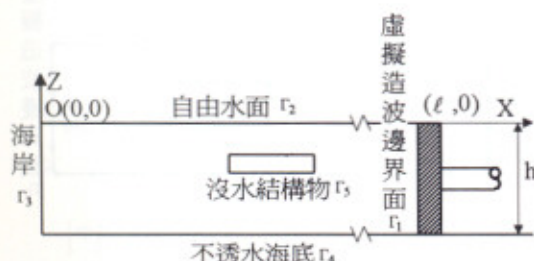


圖 1 定義圖

如圖 1 所示，假定 $x-z$ 平面有一海岸斷面地形，岸邊與水面之交界處定為笛卡兒座標系之原點 $O(0,0)$ ， x 軸以水平向右為正， z 軸以垂直向上為正。於離岸線相當遠的 $x=l$ 等水深處設一虛擬造波邊界面，使整個解析的領域成爲一封閉區域，沒水結構物可放置距岸邊任意處。領域內之流體假設爲非粘性、非壓縮性之理想流體，當波浪自虛擬造波板等水深處向海岸推進時(即向負 x 方向進行)，則領域內之流體運動應具有一速度勢(velocity potential) $\Phi(x,z,t)$ 此速度勢 Φ 應滿足下列 Laplace 連續方程式：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

2.2 邊界上之邊界條件

解析領域各邊界面之邊界條件如下：

1. 自由水面

在自由水面上，若令大氣壓力恒爲一定值並視爲 0 時，依動力學邊界條件及運動學邊界條件得：

$$u = \frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2)$$

$$w = \frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} + g\eta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (4)$$

上式中之 D 表示拉氏全微分(Lagrange differentiation)， g 爲重力加速度， η 爲水面波形。

2. 固定不透水海底面

於固定不透水海底面上，因不考慮其表面之黏滯性，流體運動在其法線方向的流速應爲 0，即：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad (5)$$

其中 ν 爲法線方向之單位向量。

3. 虛擬造波邊界面

在 $x=l$ 處，由於虛擬造波邊界面可視爲一移動之造波機造波板，令其水平移動之速度爲 $U(t)$ ，故將虛擬造波邊界面以各種不同條件的 $U(t)$ 代入即可模擬各種造波機之造波情形。由於虛擬造波邊界面之水平移動速度 $U(t)$ 與水分子之水平流速必須連續，故假想邊界面上有下列之關係式成立：

$$\bar{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = U(t) \quad (6)$$

模擬孤立波時， $U(t)$ 值之表示法係根據 Boussinesq 於 1872 年所發表之理論公式，孤立波乃(cnoidal wave)之極限波形，其波形爲

$$\eta = \zeta \sec h^2 \left[\sqrt{\frac{3\zeta}{4h}} \frac{x-ct}{h} \right] \quad (9)$$

式中 c 為孤立波波速， $c = \sqrt{g(h + \zeta)}$ 。

水分子水平流速可表示為：

$$u = \sqrt{\frac{g}{h}} \left[\eta - \frac{\eta^2}{4h} + \left(\frac{h^2}{3} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \quad (10)$$

(10)式右邊第二、三項為高次微小量，可忽略並以 η 及 c 代入，得虛擬造波邊界之移動速度為：

$$U(t) = x_0 \cdot \omega \cdot \sec h^2 \left[\omega(t - t_c) \right] \quad (11)$$

$$x_0 = h \sqrt{\frac{4\zeta_0}{3(h + \zeta_0)}} \quad (12)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h} \sqrt{\frac{3\zeta_0}{4h} \left(1 + \frac{\zeta_0}{h} \right)}} \quad (13)$$

$$t_c = \pi / \omega \quad (14)$$

故模擬孤立波時， $U(t)$ 可以上式表示。上式中之 x_0 為虛擬造波邊界面最大移動擺幅之半 (semistroke)， ζ_0 則為其入射波振幅，由於孤立波單一波峰之波形，故相當於孤立波之入射波高。

2.3 基本方程式

任意水深之領域，無法以解析方式解析，唯若速度勢 $\Phi(x, z, t)$ 滿足 Laplace 方程式，且其二次導函數存在時，則依據 Green 第二定理，領域內任意一點之速度勢 $\Phi(x, z, t)$ 可藉由邊界上之速度勢 $\Phi(\xi, \eta, t)$ 及其對邊界上法線方向之一次導函數 $\partial\Phi(\xi, \eta, t)/\partial\nu$ 來決定，解析領域內任意一點 (x, z) 之速度勢可由下列積分方程式表示：

$$\Phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial\Phi(\xi, \eta, t)}{\partial\nu} \ln \frac{1}{r} - \Phi(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial\nu} \ln \frac{1}{r} \right] ds \quad (15)$$

式中， $r = \left[(\xi - x)^2 + (\eta - z)^2 \right]^{1/2}$ ，即當邊界上之速度勢 $\Phi(\xi, \eta, t)$ 及其對邊界上法線方向之一次導函數 $\partial\Phi(\xi, \eta, t)/\partial\nu$ 為已知時，任意點之速度勢為該點與邊界之距離 r 的函數關係，故對任意幾何形

狀之邊界，其內部任意點之速度勢均為可求。

當領域內之任意點 (ξ', η') 相當趨近於平滑之邊界面 (ξ, η) 時，其速度勢則可以由下列之積分方程式表示：

$$\Phi(\xi', \eta'; t) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial\Phi(\xi, \eta, t)}{\partial\nu} \ln \frac{1}{R} - \Phi(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial\nu} \ln \frac{1}{R} \right] ds \quad (16)$$

$$\text{其中，} R = \left[(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 \right]^{1/2}$$

2.4 積分方程式之分離化

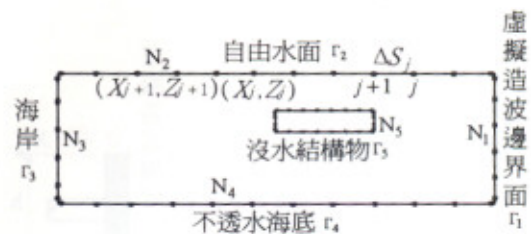


圖 2 起始解析領域邊界面元素定義圖

如圖 2 所示，將欲解析領域之封閉邊界線 Γ 以線形元素 (linear element) 分成虛擬造波邊界面 Γ_1 、自由水面 Γ_2 、海岸線 Γ_3 、固定不透水海底 Γ_4 、沒水結構物 Γ_5 ，各邊界線 Γ_i 以 $N_i (i=1 \sim 5)$ 個節點加以分割，全部節點可表示為 $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ ，每個元素以一次度線形元素作為分離化元素，即於邊界元素 e_j 之兩端各設一節點，座標分別以 (x_j, z_j) 及 (x_{j+1}, z_{j+1}) 表示對任意元素 e_j 內任一點之速度勢可以兩端節點上已知之速度勢及內插值 M_1 、 M_2 表示，故(16)式可以下列之分離化形式表示：

$$\Phi_j(\xi', \eta'; t) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[\Phi_j(\xi, \eta; t) M_1 + \frac{\partial}{\partial\nu} \ln \frac{1}{r} \right] ds = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left[\bar{\Phi}_j(\xi, \eta; t) M_1 + \bar{\Phi}_{j+1}(\xi, \eta; t) M_2 \right] \ln \frac{1}{r} ds \quad (17)$$

其中在此 i 表領域內之點、 j 表邊界上之點， $\bar{\Phi}_j = \partial\Phi_j / \partial\nu$ ； $\bar{\Phi}_{j+1} = \partial\Phi_{j+1} / \partial\nu$ ，而 M_1 、 M_2 為形狀函數(內插函數)， $M_1 = (1-\chi)/2$ ， $M_2 = (1+\chi)/2$ ， χ 為各元素所使用之無次元座標系。

令

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} [\Phi_j(\xi, \eta; t) M_1 + \Phi_{j+1}(\xi, \eta; t) M_2] \frac{\partial}{\partial\nu} \\ \ln \frac{1}{r} ds = \begin{bmatrix} h_{ij}^1 & h_{ij}^2 \\ \Phi_j \\ \Phi_{j+1} \end{bmatrix} \\ \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} [\bar{\Phi}_j(\xi, \eta; t) M_1 + \bar{\Phi}_{j+1}(\xi, \eta; t) M_2] \\ \ln \frac{1}{r} ds = \begin{bmatrix} g_{ij}^1 & g_{ij}^2 \\ \Phi_j \\ \Phi_{j+1} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (18)$$

將(18)式代入(17)式，以矩陣之形式表示如下：

$$[\Phi] = [O][\bar{\Phi}] \quad (19)$$

$[\Phi]$ 及 $[\bar{\Phi}]$ 分別表示邊界上之速度勢及其導函數值。

2.5 聯立方程式的建立

於起始造波時間 $t=0$ 時，各邊界上之起始值邊界條件

1. 虛擬造波邊界面 Γ_1

視假想邊界面為一造波板，考慮造波板之水平運動速度與流體水分子流速必須連續，故 $t=0$ 時可有下列之關係

$$\bar{\Phi}_1^0 = \frac{\partial\Phi_1^0}{\partial\nu} = -U(0) \quad (20)$$

式中之上標“0”表示起始造波時間 $t=0$ 時刻。

2. 自由水面 Γ_2

假定自由水面在最開始時(即 $t=0$) 為完全靜

止的液面，其速度勢為 0：

$$\Phi_2^0 = 0 \quad (21)$$

3. 固定不透水邊界面 Γ_3

由於假定不透水邊界面為不透水，法線方向的流速於任何時刻均為 0：

$$\bar{\Phi}_3^k = \frac{\partial\Phi_3^k}{\partial\nu} = 0 \quad (22)$$

4. 固定不透水海底 Γ_4

假定固定海底為不透水，故其法線方向之流速於任何時刻均為 0

$$\bar{\Phi}_4^k = \frac{\partial\Phi_4^k}{\partial\nu} = 0 \quad (23)$$

5. 沒水結構物

$$\frac{\partial\Phi_5^k}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_5^k}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial\Phi_5^k}{\partial z} \cos(n, z) \quad (24)$$

n 為沒水表面法線方向

2.6 物理量之差分

利用中央差分(central difference)，自由水面上任意時刻 $t=k \Delta t$ 時，各節點之速度勢在切線方向之導函數 $\partial\Phi_{2,j}^k / \partial s$ 可依下式計算：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi_{2,j}^k}{\partial s} \right) &= \left(\frac{\Delta s_{j-1}^k}{\Delta s_j^k} \right) \cdot \Phi_{2,j+1}^k / s' + \left(\Delta s_j^k - \Delta s_{j-1}^k \right) \\ &\cdot \Phi_{2,j}^k / s'' - \left(\frac{\Delta s_j^k}{\Delta s_{j-1}^k} \right) \cdot \Phi_{2,j-1}^k / s' \\ \Delta s_j^k &= \sqrt{(x_{j+1}^k - x_j^k)^2 + (z_{j+1}^k - z_j^k)^2} \\ s' &= \Delta s_j^k + \Delta s_{j-1}^k s'' = \Delta s_{j-1}^k \cdot \Delta s_j^k \end{aligned} \quad (25)$$

同時在自由水面上，速度勢法線方向之導函數 $\partial\Phi_2 / \partial\nu$ 及切線方向之導函數 $\partial\Phi_2 / \partial s$ 與其在 x 、 z 軸方向之分量 $\partial\Phi_2 / \partial x$ 、 $\partial\Phi_2 / \partial z$ 間有下列的關係：

$$\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial v} \sin \beta - \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial s} \cos \beta \quad (26)$$

$$\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial v} \cos \beta + \frac{\partial \Phi_2^k}{\partial s} \sin \beta$$

式中之 v 、 s 分別表其法線及切線方向， β 則為自由水面波形之表面切線與 x 軸方向之水平線間的夾角。

令自由水面上任意一點 (x, z) 在時間 $t = k \Delta t$ (Δt 表式時間差分之間隔) 時刻的位置為 (x^k, z^k) ，對(2)及(3)式作前進差分(forward-difference)時，可得 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻的位置 (x^{k+1}, z^{k+1}) 如下：

$$x^{k+1} = x^k + \left(\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial x} \right) \Delta t \quad (27)$$

$$z^{k+1} = z^k + \left(\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial z} \right) \Delta t \quad (28)$$

其中 Δt 表示時間之差分間距。

將(26)式之關係式代入(4)式所示之動力學邊界條件，同時並對時間作前進差分，可得 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻之速度勢 Φ_2^{k+1} ：

$$\Phi_2^{k+1} = \Phi_2^k + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2^k}{\partial v} \right)^2 \right] \Delta t - g z^{k+1} \Delta t \quad (29)$$

利用(5)·(6)及上式代入(19)式即可得 $t = (k+1)\Delta t$ 時刻各邊界面相關物理量的矩陣如下

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} I - O_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 - O_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 - O_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 - O_{42} & 0 & 1 & 0 \\ 0 - O_{52} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O_{11} & 0 & O_{13} & O_{14} & O_{15} \\ O_{21} & -I & O_{23} & O_{24} & O_{25} \\ O_{31} & 0 & O_{33} & O_{34} & O_{35} \\ O_{41} & 0 & O_{43} & O_{44} & O_{45} \\ O_{51} & 0 & O_{53} & O_{54} & O_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \\ \bar{\Phi}_5 \end{bmatrix}^{k+1} \quad (30)$$

其中 I 為單位矩陣

2.7 時間反覆計算流程

數值水槽解析過程之過程如圖 3 所示，

1. 於起始 $t = \kappa \Delta t (\kappa=0)$ 時刻，由(20~24)式得知已知條件為虛擬造波邊界面速度勢之法線方向導函數 $\bar{\Phi}_1^k$ 、自由水面速度勢 Φ_2^k 及固定不透水邊界面法線導函數 $\bar{\Phi}_3^k$ 、 $\bar{\Phi}_4^k$ 和沒水結構物法線導函數

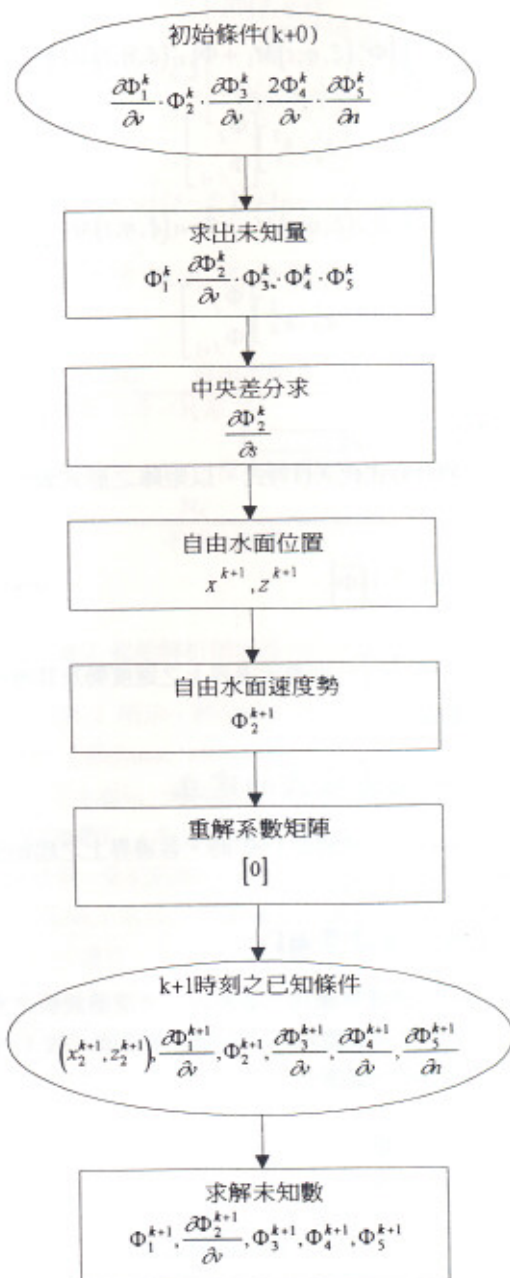


圖 3 時間反覆計算流程圖

$\bar{\Phi}_5^k$ ，將各已知條件代入(19)式解聯立方程式得虛擬造波邊界面之速度勢 Φ_1^k 、自由水面速度勢之法線方向導函數 $\bar{\Phi}_2^k$ 及不透水面之速度勢 Φ_3^k 及 Φ_4^k ，沒水結構物之速度勢 Φ_5^k 。

2. 其次在自由水面上，由已知之速度勢 Φ_2^k 以(25)式計算求得其切線方向之導函數 $\partial\Phi_2^k/\partial s$ 。

3. 利用自由水面之 $\partial\Phi_2^k/\partial v$ 及 $\partial\Phi_2^k/\partial s$ 依(26)式之關係求得 $\partial\Phi_2^k/\partial x$ 及 $\partial\Phi_2^k/\partial z$ ，由於本文模式屬不定常之問題，其邊界面外形並隨著時刻之不同而有所變化，故可依(27)及(28)式求得 $t=(k+1)\Delta t$ 時各節點之位置 (x^{k+1}, z^{k+1}) ，作為解析 $t=(k+1)\Delta t$ 時刻水面之新位置。

4. $t=(k+1)\Delta t$ 時刻之由水面上的速度勢 Φ_2^{k+1} 可由(29)式以 $t=k\Delta t$ 時刻之速度勢 Φ_2^k 、法線方向及切線方向之導函數 $\partial\Phi_2^k/\partial v$ 、 $\partial\Phi_2^k/\partial s$ ，配合上述步驟 3. 求得自由水面位置求得 (x^{k+1}, z^{k+1}) 。

5. 將 $t=(k+1)\Delta t$ 時刻之各已知物理量及水面波形等以(19)式重新求解係數矩陣 [O] 之值以便進行下一時刻之計算。

6. 在進行 $t=(k+1)\Delta t$ 時刻之解析時，領域之各邊界面乃由上述所求得之自由水面新位置、移動之虛擬造波板邊界面與不透水海底所圍成之封閉領域，並由所求得之 $t=(k+1)\Delta t$ 時刻自由水面之速度勢 Φ_2^{k+1} ，加上由(6)式及(5)式分別求得的 $t=(k+1)\Delta t$ 時刻虛擬造波邊界面與不透水海底之法線方向速度 $\bar{\Phi}_1^{k+1}$ 、 $\bar{\Phi}_3^{k+1}$ 、 $\bar{\Phi}_4^{k+1}$ 、 $\bar{\Phi}_5^{k+1}$ 等條件，代入(30)式解聯立方程式，求得 $t=(k+1)\Delta t$ 時刻垂直於自由水面之法線方向導函數 $\bar{\Phi}_2^{k+1}$ 、虛擬造波邊界面、固定不透水、沒水結構物之速度勢 Φ_1^{k+1} 、 Φ_3^{k+1} 、 Φ_4^{k+1} 、 Φ_5^{k+1} 等。

自第二步驟起反復計算即可求得自由水面各點(x,z)之位置變化，此即為自由水面波形的歷時(time histories)。

3. 數值計算例及結果

本研究在利用邊界面法進行解析時，各邊界以 $N_i (i=1\sim 5)$ 個節點加以分割，全部領域內可表示為 $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ ，沒水結構物以平板為例，再將 N_5 分割成 $N_5 = N_{51} + N_{52} + N_{53} + N_{54}$ 節點。計算例將外海等水深 h 作為代表單位，令入射波條件 $\zeta/h=0.10$ ，其中 $N_1=11, N_2=121, N_3=6, N_4=81, N_{51}=11, N_{52}=5, N_{53}=11, N_{54}=5$ 時間差分間格 $\Delta t=tc/400 (tc=\pi/\omega)$ ，數值水槽長度 L 為 90h，沒水平板寬度為 2.0h，厚度為 0.05h。配置解析領域內各邊界面上的節點數時，其分割元素和時間分間格大小，對於數值計算上的穩定性影響頗大，圖 4、圖 5 示沒水平板放置於水深 0.5h、0.25h 距岸邊為 $2/3 \ell$ ，孤立波通過沒水平板時波形之傳遞及變形。

結果顯示沒水平板設置在 0.5h 水深時，孤立波尾端分裂成一微小波峰，但孤立波通過平板後，分裂波峰消失，水平板設置在 0.25h 水深時，孤立波尾端分裂較大之波峰與波谷。沒水平板設置水深較淺時可能會造成碎波。

4. 結論

本研究利用 Lagrange 法描述流體運動並配合時間差分觀念，以邊界面法建立孤立波與沒水平板之互制關係，並顯示孤立波通過沒水結構物時，因沒水結構物放置水深之不同造成波浪之分裂，設置水深較淺時造成較大之分裂波，因此可預測如沒水平板放置更淺時將造成更大的分裂波

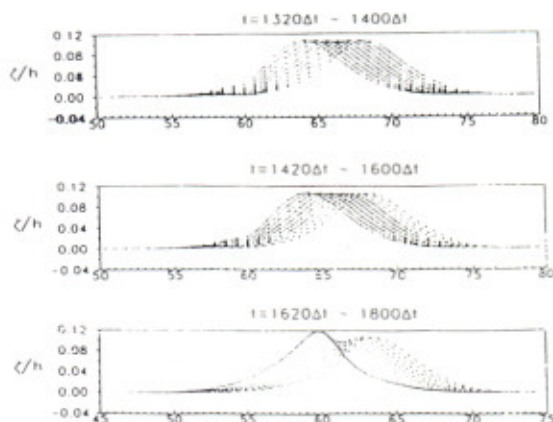


圖 4 孤立波通過沒水平板(水深 0.5h)變形情形

或碎波。由此顯示可利用本模式計算如圓筒、繫留結構物與波浪之互制行爲，並進一步分析沒水結構物與非線性波浪之運動行爲。

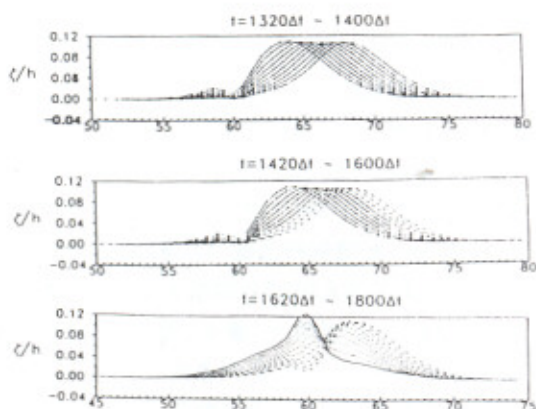


圖 5 孤立波通過沒水平板(水深 $0.25h$)變形情形

參考文獻

1. 周宗仁、翁文凱、陳明宗、黃一平(1995)“水中繫留平板運動及消波特性的數值分析”，第十七屆海洋工程研討會，459 頁-474 頁。
2. 石瑞祥(1997)“二維斷面數值造波水槽之研究”國立臺灣海洋大學河海工程系博士論文。
3. 周宗仁(1982)“邊界元素法在波浪力學之應用”國立臺灣海洋學院，河海工程學會。
4. Haruyuki Kojima et. al(1994)“Second-Order interactions between Water Wave and a Submerged Horizontal Plate”, Coastal Engineering in Japan Vol.37 ,No.2, pp.153~pp.172.