

斜坡面上碎波波形之數值計算研究

周宗仁*

左羅航**

摘 要

本文在此提出一數值計算方法，用以探討斜坡面上波浪的碎波波形。本法首先依照線性波理論以邊界元素法求出在二維度有限水深領域內自由水面之波形，當此線性水面波形求出後，將其視為一初期值，考慮自由水面邊界條件的非線性項再將線性波之初期值代入差分式，逐次運用邊界元素法求出下一時刻之波形，此時所求得之水面波形是為非線性水面波形。反覆運算之即可求得自由水面波形之歷時變化，從而碎波時之波形、波高、水深及碎波點皆可求得。

本文雖僅探討斜坡坡度為 1 : 10 之自由水面的波形，但實際上對於任意的斜坡坡度，本法亦能求出其在斜坡面上碎波波形的變化。

一、導 論

爲了求得斜坡面上波浪碎波之波形變化，則必須先瞭解自由水面上的波形隨時間變化的情形。近些年來由於邊界元素法 (Boundary Element Method) 已經廣泛而有效地被用來解決有關之邊界值問題上，而一般在解邊界值問題中，對於邊界條件式中的非線性項在處理上極爲困難，因此在線性理論中對於非線性項之作用予以忽略。本文在此乃應用邊界元素法並提出一方法，用以解決上述非線性項的問題。

本文從事數值計算時，由於考慮電腦容量及 CPU 時間的問題，而僅以 1 : 10 的斜坡坡度，以各種不同的波浪條件來進行數值計算。而計算後將所求得之碎波波高、碎波水深、碎波點及碎波波高水深比與合田 (GODA) 的實驗值作一比較。

本文期望能將所引用之方法作爲估算波浪發生碎波時之碎波波高、碎波水深及碎波點之依據。

* 國立臺灣海洋學院河海工程學系教授

** 國立臺灣海洋學院河海工程研究所畢業

二、微小振幅波理論解析

2-1 基本假定與速度勢表示法

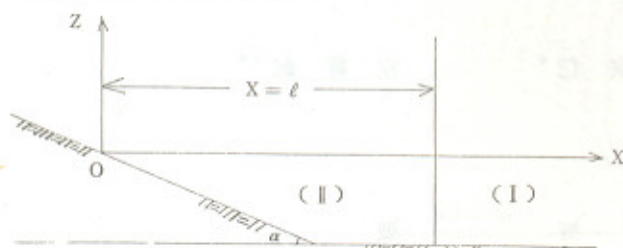


圖 1：計算領域示意圖

如圖 1 所示：靜水面與斜坡面之交點定為座標原點 O，其水平向外海方向定為 X 軸，垂直向上定為 Z 軸。假設斜坡面及海底底床均為不透水。假設 $X = l$ 處有一假想邊界面將流體分為(I)及(II)區，並假設(I)及(II)區為非壓縮，非粘滯且非旋轉之理想流體所充滿，則流體運動時具有速度勢 $\Phi(x, z; t)$ 。當(I)區有一為振幅 ζ_0 ，這頻率為 $\sigma (= 2\pi/T)$ 之波浪入射，則(II)區之速度勢可以用下式表之

$$\Phi(x, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi(x, z) e^{i\sigma t} \dots\dots\dots (2.1)$$

此時之 $\phi(x, z)$ 必須要滿足 Laplace 方程式即

$$\nabla^2 \phi(x, z) = 0 \dots\dots\dots (2.2)$$

若假想邊界面離岸線甚遠，則可假定(I)區領域之流體運動不受散射波 (Scattering wave) 之影響，其速度勢可以下式表之：

$$\phi(x, z) = [e^{ik(x-l)} + \phi e^{-ik(x-l)}] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (2.3)$$

但 ϕ 表示反射率

在假想邊界線上速度勢及其在法線方向導函數分別表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \phi(x=l, z) &= (1+\phi) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ \bar{\phi}(x=l, z) &= ik(1-\phi) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

2-2 幾何學上之邊界條件

(1)由於假設斜坡面及海底底床均為不透水故

$$\partial\phi/\partial n = 0 \quad z = -h; -\alpha h \dots\dots\dots (2.5)$$

(2)自由表面動力學邊界條件與運動學邊界條件由於壓力連續且忽略非線性項得：

$$\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi \quad z = 0 \dots\dots\dots (2.6)$$

2-3 格林 (Green) 函數之選定

根據Green定理：在領域內部點之速度勢函數可以從邊界線上之函數值及速度勢對邊界法線之微分値來決定，則內部點之速度勢可以下式表之：

$$\phi_D(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - \phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] dS \dots\dots\dots (2.7)$$

而邊界線上點之速度勢可以下式表之

$$\phi_B(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - \phi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] dS \dots\dots\dots (2.8)$$

在(2.7)式及(2.8)式中 $\ln \frac{1}{r}$ 為滿足Laplace 方程式的特別解。

2-4 線性元素與元素無次度座標化

為了描述兩節點間之物理量呈線性變化之特性，今以一次度線性元素作為分離化元素。線性元素全體系座標及無次度座標如下圖2所示

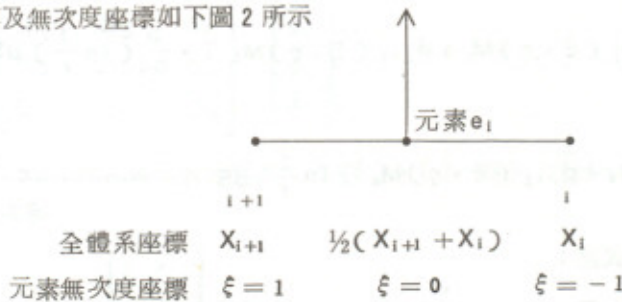


圖2：線性元素全體系及無次度座標

從圖2中 ξ 與 x 間之關係可表為下式：

$$\xi = \frac{2x - X_{i+1} - X_i}{\Delta X_i}$$

則 ϕ 及 $\bar{\phi}$ 可表示為

$$\left. \begin{aligned} \phi &= M_1 \phi_i + M_2 \phi_{i+1} \\ \bar{\phi} &= M_1 \bar{\phi}_i + M_2 \bar{\phi}_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9)$$

其中 $M_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$ $M_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$ ， M_1, M_2 稱為形狀函數而 M_1, M_2 在元素內之變化如圖3所示：

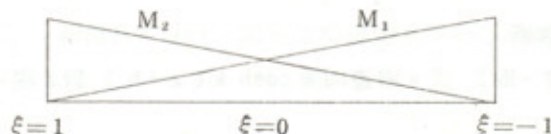


圖3： M_1, M_2 在元素內之變化情形

(2.9) 式若以矩陣式表示則可改寫下式

$$\left. \begin{aligned} \phi &= [M_1, M_2] \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{Bmatrix} \\ \bar{\phi} &= [M_1, M_2] \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_i \\ \bar{\phi}_{i+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

在此我們亦引用了高斯積分公式其公式如下式：

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N W_i f(\xi_i) \dots\dots\dots (2.11)$$

其中 W_i 為權重， $i = 1 \sim N$ ， N 為兩元素間之積分選點數。

2-5 積分方程式之分離化

利用上節之線性元素，若將(2.10)式代入積分方程式則(2.8)可用下述之分離化形式(2)表之：

$$\begin{aligned} \phi_i(x, z) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\phi_j(\xi, \eta) M_1 + \phi_{j+1}(\xi, \eta) M_2] \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dS \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\bar{\phi}_j(\xi, \eta) M_1 + \bar{\phi}_{j+1}(\xi, \eta) M_2] \ln \frac{1}{r} dS \dots\dots\dots (2.12) \end{aligned}$$

將上式整理簡化，再化為矩陣式為：

$$[H + I] [\phi] = [G] [\bar{\phi}] \dots\dots\dots (2.13)$$

$$\begin{aligned} \therefore [\phi] &= [H + I]^{-1} [G] [\bar{\phi}] \\ &= [O] [\bar{\phi}] \dots\dots\dots (2.14) \end{aligned}$$

其中 $[O] = [H + I]^{-1} [G]$ ， I 為單位矩陣。

2-6 假想邊界面處的力學邊界條件

由於在假想邊界面處 ($x = \ell$)，(I)領域及(II)領域之能量流束 (Energy flux) 及質量流束 (Mass flux) 必須要相等，故可用下兩式表示之：

$$\phi_i(x = \ell, z) = \varphi_i(x = \ell, z) \dots\dots\dots (2.15)$$

$$\bar{\phi}_i(x = \ell, z) = \bar{\varphi}_i(x = \ell, z) \dots\dots\dots (2.16)$$

2-7 微小振幅速度勢之解析

將(2.4)式代入(2.16)式。兩邊同乘 $\cosh k(z+h)$ 對 z 從 $-h$ 至 0 予以積分，可得：

$$\phi = 1 + \frac{i}{No \cdot \sinh kh} \int_{-h}^0 \bar{\phi} \cosh k(z+h) dz \dots\dots\dots (2 \cdot 17)$$

其中 $No = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$

將(2·17) 式代入(2·15) 可求出假想邊界面上各節點之速度勢，若將其表為矩陣，可用下表之：

$$\{ \phi_1 \} = \{ Z \} + \{ F \} \dots\dots\dots (2 \cdot 18)$$

其中： $\{ Z \} = 2 \cosh k(Zp+h) / \cosh kh$

$$\{ F \} = \frac{i \cdot \cosh k(Zp+h)}{No \cdot \sinh kh \cdot \cosh kh} \cdot \sum_{r=1}^{N_1} \left(\int_{\Gamma_r} \bar{\phi}_r \cosh k(Zr+h) \right) dS$$

在(2·14) 式中，若將其改為各邊界面之子矩陣式以下式表之

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2 \cdot 19)$$

此時再將(2·5) 式之邊界條件式及(2·6)，(2·18) 之已知條件式代入上式，予以整理化簡，可表成下式即

$$\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} = [B]^{-1} \begin{Bmatrix} [Z] \\ [O] \end{Bmatrix}$$

其中：

$$[B] = \begin{bmatrix} \{ [O_{11}] - [F] \} & \{ \Gamma O_{12} \} \\ \{ O_{21} \} & \{ [\Gamma O_{22}] - [I] \} \end{bmatrix}$$

而自由水面之各節點振幅(ζ)值可用下式求之：

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -i \cdot \phi_2 \cdot \zeta_0 \cdot e^{i\sigma t}$$

若給定入射振幅(ζ₀)，相位角(σt)，即可求得自由水面上各節點之振幅值，於是微小振幅波之水面波形即可求出。

三、有限振幅波理論解析

3-1 非線性之邊界條件

(i) 自由水面之動力及運動邊界條件之非線性項可以下式表之：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\zeta = 0 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 2)$$

(ii) 輻射條件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{k}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 3)$$

3-2 差分化

$\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ 可以用垂直水面分量 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 及切線分量 $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ 來表示：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \sin \beta - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \cos \beta \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \sin \beta \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 5)$$

其中 β 為自由水面上相鄰兩節點間之線段與水平線之夾角⁽³⁾ 將 (3·4) , (3·5) 代入 (3·2) 式，經整理並將其化為差分式得：

$$(\zeta^{k+1})_j = (\zeta^k)_j + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{\cos \beta^{k+1}} (\Phi_n^{k+1})_j + \frac{1}{\cos \beta^k} (\Phi_n^k)_j \right] \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 6)$$

將 (3·4) , (3·5) , (3·6) 式代入 (3·1) 式經整理化簡得

$$(\Phi_n^{k+1})_j = \frac{1-c}{b} (\Phi_n^{k+1})_j + \frac{c}{b} (\Phi_n^{k+1})_{j-1} - \frac{a}{b} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 7)$$

其中 a、b、c 為已知常數，可以下述表之：

$$a = (\Phi^k)_j - g \cdot \Delta t \cdot (\zeta^k)_j - g \cdot \left(\frac{1}{2}\right) (\Delta t)^2 \cdot \frac{(\Phi_n^k)_j}{\cos \beta} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 8)$$

$$b = -\frac{g}{2} \cdot (\Delta t)^2 \cdot \frac{1}{\cos \beta^{k+1}} - \frac{\Delta t}{2} \cdot (\Phi_n^k)_j \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 9)$$

$$c = -\frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S} \cdot [(\Phi^k)_j - (\Phi^k)_{j-1}] / \Delta S \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 10)$$

將輻射條件 (3·3) 式差分化為：

$$(\Phi^{k+1})_1 = d + e \cdot (\Phi_n^{k+1})_1 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 11)$$

其中 d 、 e 為常數，表之如下：

$$d = (\Phi^k)_I + (\Phi_n^k)_I \cdot \left(\frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\sigma}{-k} \right) \dots\dots\dots (3 \cdot 12)$$

$$e = \left(\frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\sigma}{-k} \right) \dots\dots\dots (3 \cdot 13)$$

3-3 有限振幅速度勢解析

本節所使用之 Green 公式與前章相同，若重覆 2-5 節之步驟，可將積分式化為矩陣式：

$$[H][\phi] = [G][\bar{\phi}] \dots\dots\dots (3 \cdot 14)$$

將上式表成各邊界面之子矩陣式同時將 (3·7)，(3·11) 代入 (3·14) 式經化簡整理後可得：

$$\begin{Bmatrix} (\Phi_n^{k+1})_I \\ (\Phi^{k+1})_{II} \\ (\Phi_n^{k+1})_{III} \end{Bmatrix} = [V]^{-1} [R] \begin{Bmatrix} [d^k]_I \\ [-(\frac{a}{b})^k]_{II} \\ (\Phi_n^k)_{III} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3 \cdot 15)$$

其中：

$$[V] = \begin{Bmatrix} \hat{H}_{11} \cdot e - G_{11}, \hat{H}_{12} - [G_{1j} (\frac{1-c}{b})^k_j] - [G_{1j+1} (\frac{c}{b})^k_{j+1}] & \hat{H}_{13} \\ \hat{H}_{21} \cdot e - G_{12}, \hat{H}_{22} - [G_{2j} (\frac{1-c}{b})^k_j] - [G_{2j+1} (\frac{c}{b})^k_{j+1}] & \hat{H}_{23} \\ \hat{H}_{31} \cdot e - G_{13}, \hat{H}_{32} - [G_{3j} (\frac{1-c}{b})^k_j] - [G_{3j+1} (\frac{c}{b})^k_{j+1}] & \hat{H}_{33} \end{Bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} -\hat{H}_{11} & G_{12} & G_{13} \\ -\hat{H}_{21} & G_{22} & G_{23} \\ -\hat{H}_{31} & G_{23} & G_{33} \end{bmatrix}$$

在 (3·15) 式等式右邊為已知而左邊為未知，故可求得 $(K+1)\Delta t$ 時刻之 $(\Phi_n^{k+1})_I$ ， $(\Phi^{k+1})_{II}$ 。由 (3·6) 式可求得 $(K+1)\Delta t$ 之水面振幅值 ζ 。由 (3·11) 可求得 $(K+1)\Delta t$ 時刻之 $(\Phi^{k+1})_I$ 值。依照此一程序反覆運算之則可求出任一微小時刻其水面之波形。於是非線性波在斜坡面上之波形變化乃至於碎波情形的發生皆能一一被描述而求得之。

四、數值計算與結果

4-1 數值計算之波浪條件

在 1:10 之斜坡坡度下，波浪條件分別為：

$$(1) \frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800 \quad \zeta_0/h = 0.060 \quad (2) \frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800 \quad \zeta_0/h = 0.055$$

(3) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.200$ $\zeta_0/h = 0.060$ (4) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.300$ $\zeta_0/h = 0.050$

4-2 節點數之設定

經由多次數值測試，發現當所分割的元素大小儘可能相同時，可以得到較穩定的數值計算結果。於是各個數值計算例的各邊界面的節點配置數可用下表 1 來表示，其中 N_1 代表假想邊界面上節點數， N_2 代表自由水面之節點數， N_{31} 表斜坡面之節點數， N_{32} 表海底底床之節點數而 N 為計算例之總節點數。

	N_1	N_2	N_{31}	N_{32}	N
$\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800$	10	60	32	28	130
$\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.200$	10	60	44	16	130
$\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.300$	10	60	46	14	130

表 1：各種不同波浪條件的各邊界面之節點配置數

4-3 數值計算結果

將各數值計算例所求得之結果，予以繪成(a)，(b)二圖。(a)圖為波浪入射後上昇至最大波高之時間歷延圖，(b)圖為從最大波高開始下降之時間歷延圖。而圖中之點乃代表數值計算時之節點位置。今將各個計算例所求得之結果敘述於後：

例 1：

圖 4 (a , b) 為 $\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800$, $\frac{H_0}{L_0} = 0.01971$, $\Delta T = \frac{T}{120}$ 之計算例。在圖 4 (a)中可以明顯看到波浪發生捲入碎波之現象。圖 5 為圖 4 (a)之局部放大圖，在此圖中可以看到在碎波之前，波峯前緣處之水粒子持續後退，形成一後退流 (back wash) 而波峯後緣之水粒子其運動方向為向岸方向，此作用持續至波浪發生碎波為止。

例 2：

圖 6 (a , b) 為 $\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800$, $\frac{H_0}{L_0} = 0.01807$, $\Delta T = \frac{T}{120}$ 之計算例。在圖 6 (a)中，可明顯地看到波浪捲入之現象。而圖 7 為波浪碎波時之局部放大圖。

例 3：

圖 8 (a , b) 為 $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.200$, $\frac{H_0}{L_0} = 0.0261$, $\Delta T = \frac{T}{120}$ 之計算例。從圖 8 (a)中可以看到波浪發生捲入碎波之現象。圖 9 為波浪碎波時之局部放大圖。

例 4：

圖 10 (a , b) 為 $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.300$, $\frac{H_0}{L_0} = 0.0231$, $\Delta T = \frac{T}{120}$ 之計算例。從圖 10 (a)中可以看到波浪已發生捲入碎波之現象。圖 11 為波浪碎波時之局部放大圖。

4-4 數值計算結果與合田(GODA)實驗值比較

爲了說明本數值方法之可用性，今將數值計算結果與合田⁽¹⁾的實驗值作一比較，並作成附表

例1： $\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800$ $\frac{H_0}{L_0} = 0.01971$ $\Delta T = \frac{T}{120}$

	H_b/H_0	h_b/H_0	X_b	H_b/h_b
數值計算值	1.5000	1.2650	1.5180	1.1858
合田實驗值	1.4700	1.3000	1.5600	1.1308

例2： $\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800$ $\frac{H_0}{L_0} = 0.01807$ $\Delta T = \frac{T}{120}$

	H_b/H_0	h_b/H_0	X_b	H_b/h_b
數值計算值	1.2666	1.3625	1.4987	0.9297
合田實驗值	1.4900	1.3100	1.4410	1.1374

例3： $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.200$ $\frac{H_0}{L_0} = 0.0261$ $\Delta T = \frac{T}{120}$

	H_b/H_0	h_b/H_0	X_b	H_b/h_b
數值計算值	1.3333	1.1894	1.4273	1.1210
合田實驗值	1.3700	1.2700	1.5240	1.0787

例4： $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.300$ $\frac{H_0}{L_0} = 0.0231$ $\Delta T = \frac{T}{120}$

	H_b/H_0	h_b/H_0	X_b	H_b/h_b
數值計算值	1.3300	1.1213	1.1213	1.1861
合田實驗值	1.4000	1.2800	1.2800	1.0938

4-5 時間分割對數值計算上之影響

爲了探討微小時間分割 Δt 對數值計算上所產生之影響，今以(A) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800$ ，

$\frac{H_0}{L_0} = 0.01971$ ，(B) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.200$ $\frac{H_0}{L_0} = 0.0261$ ，(C) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.300$ $\frac{H_0}{L_0} = 0.0231$ 三例分

別對 $\Delta t = \frac{T}{120}$ ， $\frac{T}{90}$ ， $\frac{T}{60}$ 的微小時間分割予以數值計算，並將所求得之結果，作成附表如下：

(A) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 0.800$ $\frac{H_o}{L_o} = 0.01971$

	GODA	$\Delta t = \frac{T}{120}$	$\Delta t = \frac{T}{90}$	$\Delta t = \frac{T}{60}$
H_b/H_o	1.4700	1.5000	1.4888	2.2583
h_b/H_o	1.3000	1.2650	1.2667	1.2708
H_b/h_b	1.1308	1.1858	1.1754	1.7770

(B) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.200$ $\frac{H_o}{L_o} = 0.0261$

	GODA	$\Delta t = \frac{T}{120}$	$\Delta t = \frac{T}{90}$	$\Delta t = \frac{T}{60}$
H_b/H_o	1.3700	1.3333	1.5558	1.8892
h_b/H_o	1.2700	1.1894	1.1942	1.1942
H_b/h_b	1.0787	1.1210	1.3028	1.5820

(C) $\frac{\sigma^2 h}{g} = 1.300$ $\frac{H_o}{L_o} = 0.0231$

	GODA	$\Delta t = \frac{T}{120}$	$\Delta t = \frac{T}{90}$
H_b/H_o	1.4000	1.3300	1.6400
h_b/H_o	1.2800	1.1213	1.1330
H_b/h_b	1.0938	1.1861	1.4475

由上列三表可以有如下之結論：

- (1) 由於元素分割一定 (ΔS 一定)，數值計算結果顯示時間分割對於碎波水深及碎波點，幾乎沒有什麼影響。
- (2) 當元素分割一定時，發現時間分割愈細其 H_b/h_b 值就愈接近合田的實驗值。

五、結果討論

5-1 穩定性之探討

經由多次的數值測試得知：節點適當的配置遠比節點數的多寡更直接影響數值計算。本文以固定 ΔS 而改以 Δt 作變化時，發現當 ΔS 固定時， Δt 變小會使水面波形變化在每一 Δt 時間間隔內，更趨穩定。

5-2 平滑化 (SMOOTHING)

數值運算過程中，節點上之物理量，每經過 Δt 時刻之後，其值就變化一次，而自由水面無法保持均勻穩定的波動，遂有水面節點粒子不規律地跳動現象發生。所以在程式運算中每一個 Δt 時刻之後，即作一次自由水面平滑化的控制⁽⁴⁾，其公式為

$$\bar{f}_j = \frac{1}{16} (-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2})$$

經此步驟處理後，節點不穩定之跳動現象，會趨向規律平滑，因此一個週期時間歷延之碎波水面波形的變化可以順利計算完成。

六、結 論

本文應用邊界元素法以計算光滑斜坡面上自由水面碎波波形的變化，進而推算出碎波波高、碎波水深及碎波點的位置。

依據本文之研究，可以得到下列之結論

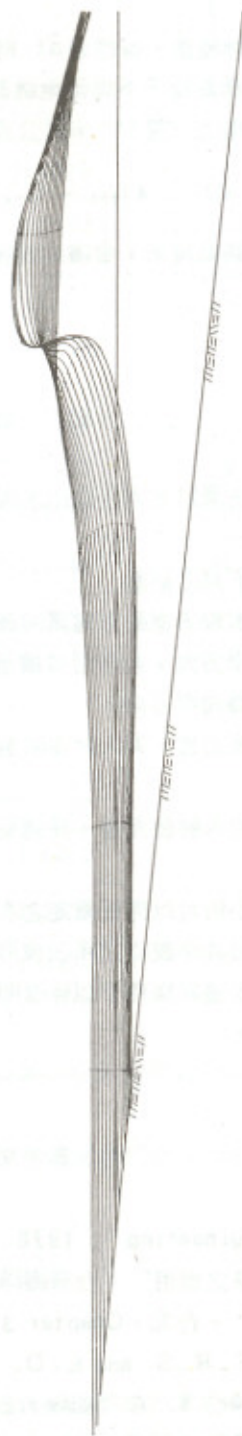
1. 碎波發生之前，波峯前緣處之水粒子運動方向為向後退，形成一後退流 (back wash)，而波峯前緣之水粒子其運動方向為向岸方向，此作用持續至波浪碎波發生為止。碎波發生後，波峯前緣處之水粒子其運動方向則改變為向岸方向。
2. 同一斜坡面對具有相同週期的波而言，其入射振幅愈大者碎波點的位置就愈遠離岸線 (即 X_b 值較大。)
3. 同一斜坡面對具有相同振幅的入射波而言，長週期波的碎波波高 H_b 值比短週期波之碎波波高 H_b 值要大。
4. 依本法固定 ΔS ，若 Δt 值愈小則可以得更穩定之水面波形變化。
5. 對於任意之斜坡坡度，亦可求出其碎波時之碎波波形，碎波波高、碎波水深及碎波點的位置。
6. 對任意地形之底床，僅需將底床邊界條件予以修改即可求出在任意的地形，其碎波波形、碎波波高、碎波水深及碎波點的位置。

七、參考文獻

1. Horikawa, K. "Coastal Engineering", 1978, pp. 54 ~ 55
2. 周宗仁 "邊界元素法在波浪力學之應用", 台灣海洋學院河海工程學會, 1983
3. 劉立方 "流體力學講習會講義", 台北, Chapter 3, 1983
4. M. S. Longuet-Higgins, F. R. S and E. D. Cokelet "The Deformation of Steep Surface wave on Water I. A Numerical Method of Computation" Proc. R. Soc. Lond. A350, 1976, pp. 1 ~ 26



(a): 波浪向岸之時間歷延圖



(b): 波浪離岸之時間歷延圖

圖 4 SHG=0.888 KH=1.032 PERIOD=2.244 EATD/H=0.868
 DT=T/120. HG/L0=0.01972 CCT=PAI/2 SLOPE=1:10

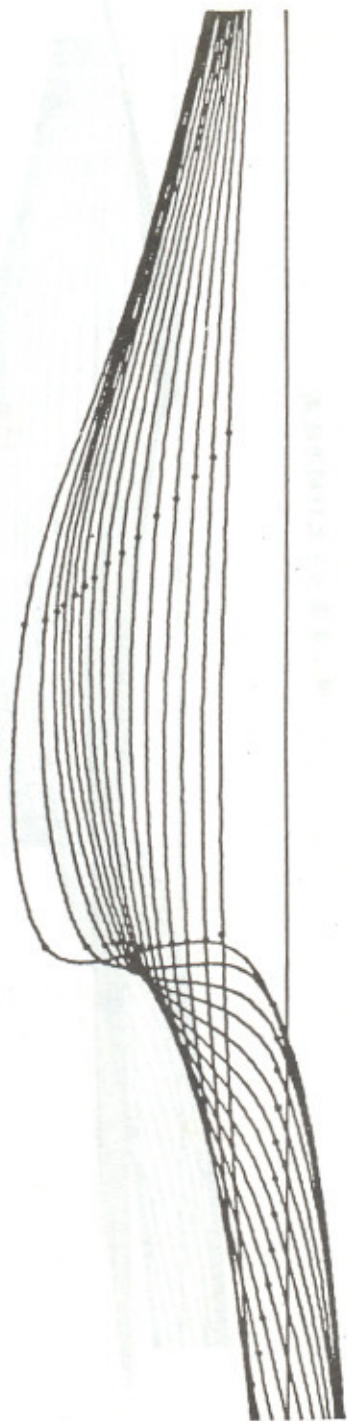
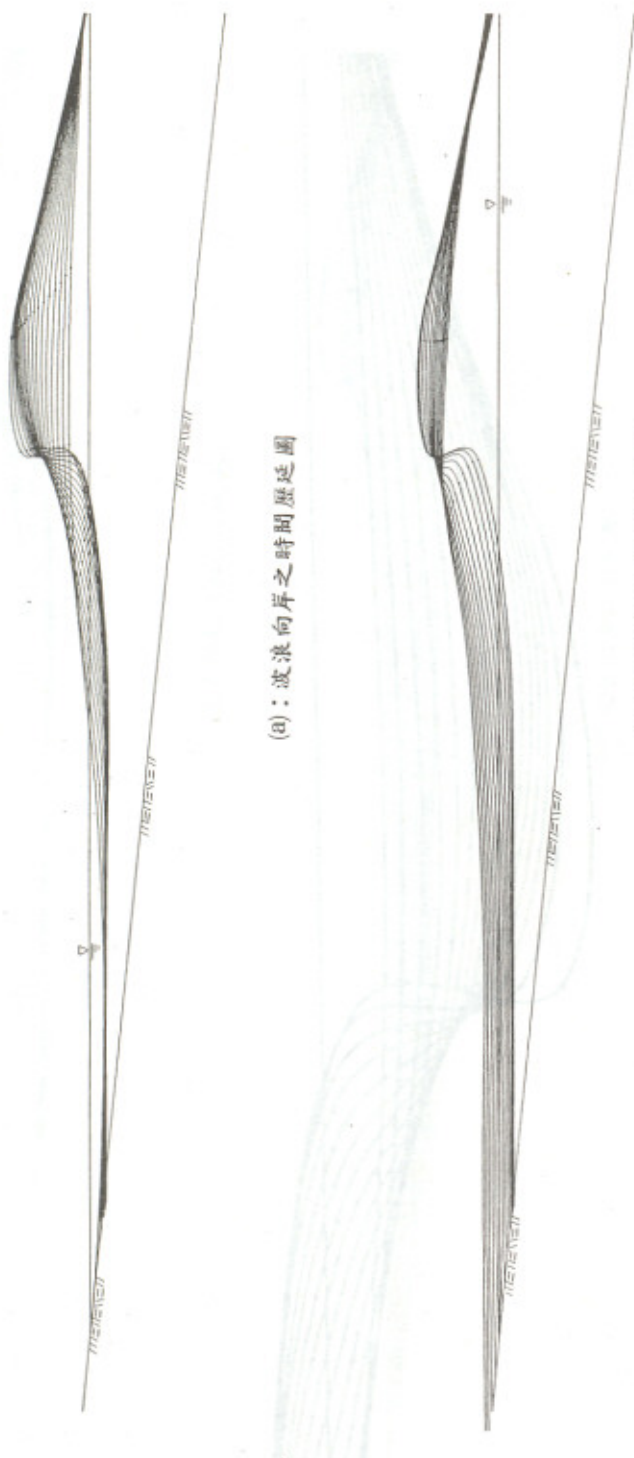


圖 5 局部放大之時間歷延圖



(a)：波浪向岸之時間歷延圖

(b)：波浪離岸之時間歷延圖

圖 6 SHG=0.000 KH=1.032 PERIOD=2.244 EATO/H=0.055
 DT=T/120. H0/L0=0.01007 CCT=P01/2 SLOPE=1:10

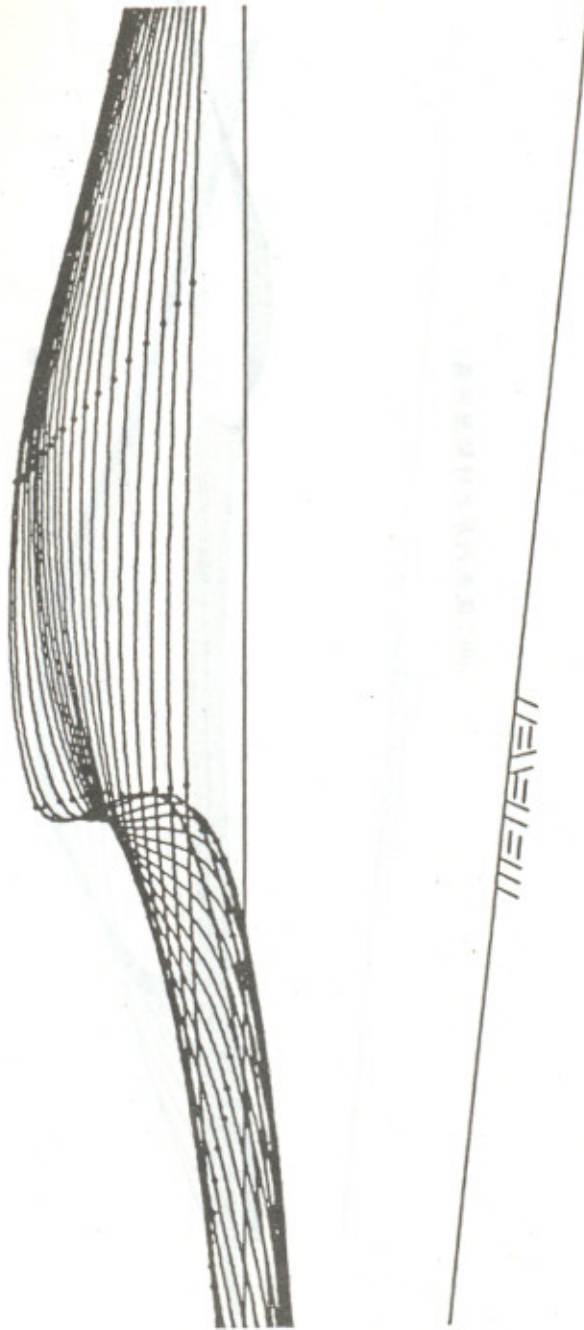
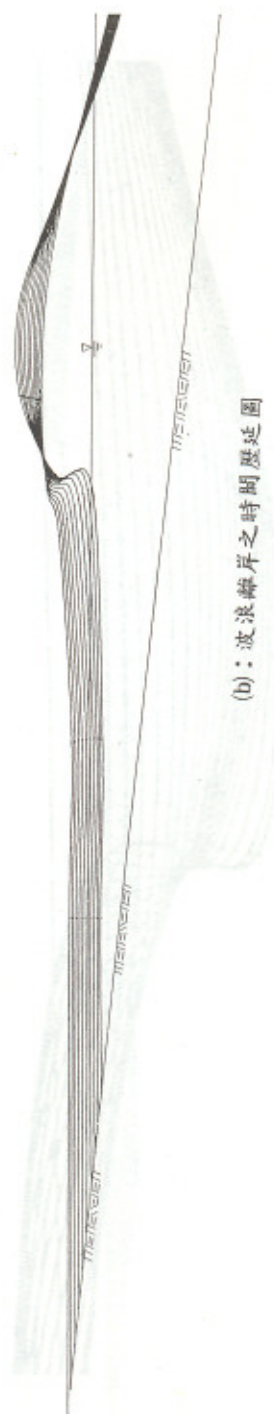


圖 7 局部放大之時間歷延圖



(a): 波浪向岸之時間歷延圖



(b): 波浪離岸之時間歷延圖

圖 8 SHG=1.200 KH=1.367 PERIOD=1.832 EATO/H=0.268
 DT=T/120. HB/LB=0.02611 CCT=PRI SLOPE=1:10

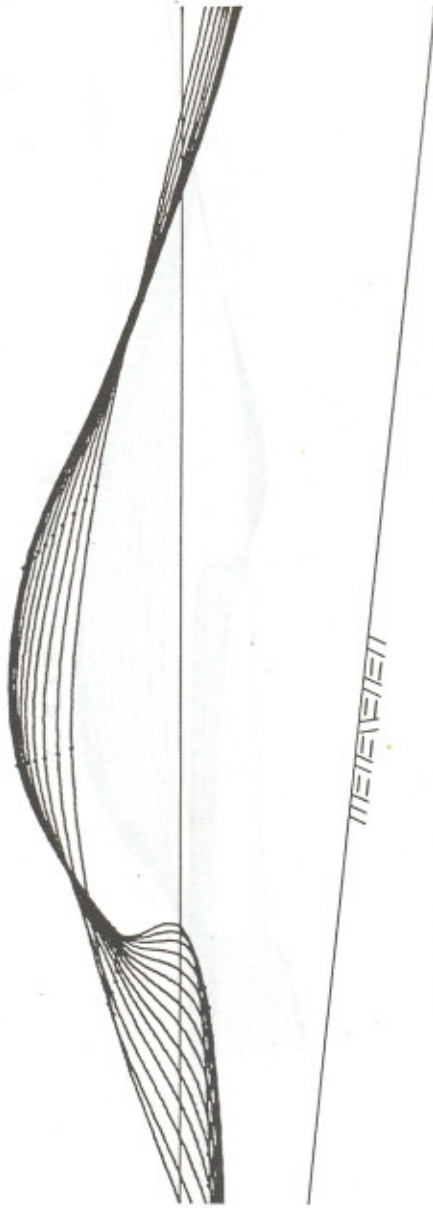
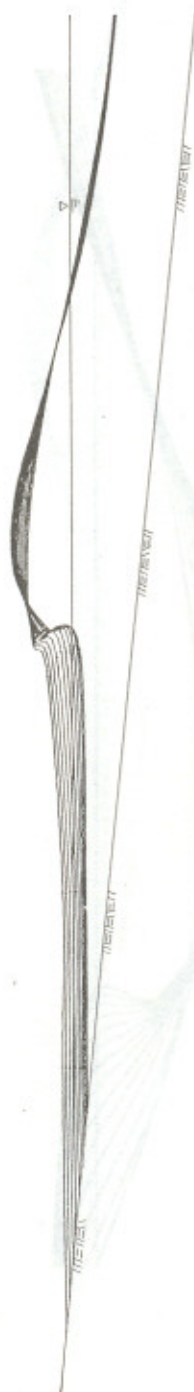


圖 9 局部放大之時間歷延圖



(a): 波浪向岸之時間歷延圖



(b): 波浪離岸之時間歷延圖

圖 10 SHG=1.300 KH=1.451 PER100=1.268 EATD/H=0.500
 DT=T/120. HB/LB=0.02309 CCT=PRI SLOPE=1:10

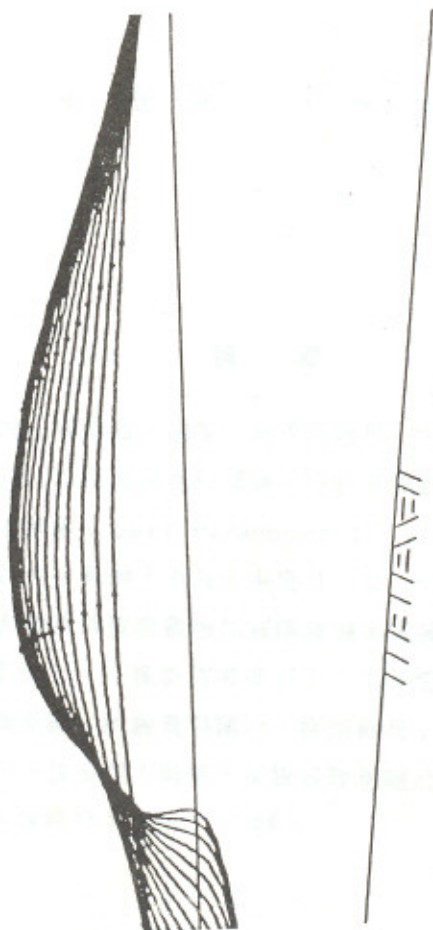


圖 11 局部放大之時間歷延圖