3維理想流體微小振幅波運動支配方程式及邊界條件

非粘性非壓縮性理想流體，靜水面取座標原點o，水平面取x、y軸、垂直向上為z軸，時間及重力加速度以t及g表示，入射波為振幅ζ_o、週頻率σ(=2π/T；T為波週期)的簡諧波，流體運動微小振幅波速度勢可以下式表示。

$$\Phi(x,y,z;t)=\frac{g\zeta_o}{\sigma}\phi(x,y,z)\exp(-i\sigma t)$$

1. 支配方程式

勢函數$\phi(x,y,z)$應為滿足下列 Laplace 方程式的函數

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

水平及垂直方向流速u，v，w；流體壓力p；水面波形ζ,流體密度ρ時，可以下式表示。

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\\
v &= \frac{\partial\phi}{\partial y}\\
w &= \frac{\partial\phi}{\partial z}\\
\frac{p}{\rho g\zeta_0} &= -i\phi(x,y,z)e^{-i\sigma t}\\
\zeta/\zeta_0 &= -i\phi(x,y,0)e^{-i\sigma t}
\end{aligned}\right\}$$

2. 靜水面邊界條件

水面上，由於運動學條件及大氣壓力一定條件得

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\sigma^2}{g}\phi \qquad (z=0)$$

3. 固定不透水面邊界條件

固定不透水面，由於流體在法線方向n流速為零,得

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

4. 無限遠處輻射條件(radiation condition)

無限遠處2維Sommerfeld輻射條件如下

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad , \quad \vec{x} \to \infty$$

或

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = ik\phi \quad , \quad \mathrm{x} \to \pm\infty$$

5. 一定水深h海域勢函數

外海領域勢函數 $\phi(x,y,z)$ 為

$$\phi(x,y,z) = \left[f_0(x,y) + f^*(x,y) \right] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}$$

$f_o(x,y)$ 及 $f^*(x,y)$ 分別表示入射波及繞射波，k為下列分散關係式之根

$$\frac{\sigma^2}{g} = kh \tanh kh$$

入射波為與x軸呈 ω 角度入射的餘弦波，水面波形 $\zeta_i(x,y;t)$ 可以下式表示

$$\zeta_i(x,y;t) = \zeta_0 \cos\left[k(x\cos\omega + y\sin\omega) + \sigma t \right]$$

則入射波勢函數 $f_o(x,y)$ 應為

$$f_0(x,y) = -i\exp\left[-ik(x\cos\omega + y\sin\omega) \right]$$

$\mathrm{f}^*(\mathrm{x},\mathrm{y})$應為滿足Helmholtz方程式的未知函數。