應用 3 維邊界元素法解析 Navier-Stokes 方程式

在理想流體場，因假定有速度勢Φ存在，只要能求解Φ這 1 個未知函數，整個流場特性就可迎刃而解。對黏性流場，因必要同時解決壓力及速度 2 個未知函數，即必須解連立方程式才能求解。本文只考量非壓縮性流體的 Stokes 流。

Stokes 流的連續方程式及運動方程式分別如下

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho F_i = 0 \quad (2)$$

$$T_{ij} = -\delta_{ij} p + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

p 為靜水壓、ρ 為流體密度、μ 為黏性係數、Fi 為單位質量所受外力、δ_{ij} 為 Kronecker delta、T_{ij} 為剪應力張量。

作為 Navier-Stokes 方程式基本解，考量(r_1, t_1)時刻位置在 k 方向受單位集中力作用時，(r, t)時刻位置的速度 $v^*_{ik}(r-r_1, t-t_1)$、壓力 $p^*_k(r-r_1, t-t_1)$，速度 v^*_{ik} 及壓力 p^*_k 應滿足下式。2011 埃及尼羅河之旅

$$\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial v^*_{ik}}{\partial t} - \frac{\partial T^*_{ijk}}{\partial x_j} = \delta_{ik} \delta(r-r_1, t-t_1) \quad (5)$$

$$T^*_{ijk} = -\delta_{ij} p^*_k + \mu \left(\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial v^*_{jk}}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

1. 定常 Stokes 流(Stokes flow)

依 Youngren & Acrivos，將(2)式乘以 $v^*_{ik}(r-r_1)$、(5) 式乘以 $v_i(r_1)$後相減，再對流場全領域作 r 的積分，利用(1)、(4)式及 Guass 發散定理，可得

$$\begin{aligned} v(r) &= \int_\Gamma [-v^*_{ik}(r-r_1) T_{ij}(r)] n_j(r)\, d\Gamma(r) \\ &+ \int_\Gamma v_i(r) T^*_{ijk} n_j(r)\, d\Gamma(r) \\ &- \int_V \rho v^*_{ik}(r-r_1) F_i(r)\, dV(r) \end{aligned} \quad (7)$$

n_j是邊界面Γ上單位法線向量在 j 軸的分量，通常邊界面上是以速度作為邊界條件，即上式是針對

$$f_i = n_j T_{ij} \quad (8)$$

成立的 3 個積分方程式。$f_i(r_1)$是邊界面上包含靜壓的流體壓力。若求得 f_i，可依(7)式求得 $v_k(r)$。對壓力 p 可同法求得積分方程式。

基本解 v^*_{ik}、p^*_k如下

$$v^*_{ik} = -\frac{1}{8\pi\mu R}\left[\hat{\delta}_{ik} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{R^2}\right] \tag{9}$$

$$p^*_k = -\frac{x_k - y_k}{4\pi R^3} \tag{10}$$

$R=r-r_1$，$R \equiv |R| = |r-r_1|$。

依上述方法導得滿足連續方程式的邊界面積分方程式。

2. 非定常 Stokes 流

將(1)及(2)式分別乘以加重函數相減後，對時間及空間作積分，得

$$\int_0^t \int_V \left\{ v^*_{ik}\left[\rho \frac{\partial v_i}{\partial t_1} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho F_i\right] - \left(p^*_k \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)\right\} dV(r)\,dt_1 = 0 \tag{11}$$

速度 $v^*_{ik}(r-r_1, t-t_1)$、壓力 $p^*_k(r-r_1, t-t_1)$雖滿足(4)式卻不是(5)式的解。利用(4)式及 Guass 發散定理，作部分積分，得(11)式如下

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t \int_V \left(-\rho \frac{\partial v^*_{ik}}{\partial t_1} - \mu \frac{\partial^2 v^*_{ik}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial p^*_k}{\partial x_i}\right) v_i\, dV(r)\,dt_1 \\
&-\int_0^t \int_\Gamma \left[-\delta_{ij} p^*_k + \mu\left(\frac{\partial v^*_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial v^*_{jk}}{\partial x_i}\right)\right] n_j v_i\, d\Gamma(r)\,dt_1 \\
&= -\int_0^t \int_\Gamma v^*_{ik}\left[-\delta_{ij} p + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] n_j v_i\, d\Gamma(r)\,dt_1 \\
&\quad + \int_0^t \int_V \left[\rho v_i v^*_{ik}\right]_{t_1=0}^{t} dV(r) - \int_0^t \int_V \rho v^*_{ik} F_i\, dV(r)\,dt_1
\end{aligned} \tag{12}$$

為了消去上式左邊第 1 項的體積積分，必要使 v^*_{ik}、p^*_k滿足下式

$$-\rho \frac{\partial v^*_{ik}}{\partial t_1} = -\frac{\partial p^*_k}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v^*_{ik}}{\partial x_j^2} - \delta_{ij}\,\delta(r-r_1)\,\delta(t-t_1) \tag{13}$$

上式左邊符號與(1)式相反，利用(13)式可將(12)式改寫如下所示非定常 Stokes 流的邊界面積分方程式。

$$\begin{aligned}
v_k(r_1,t) &= \int_0^t \int_\Gamma (v_i T^*_{ijk} - v^*_{ik} T_{ij}) n_j\, d\Gamma(r)\,dt_1 \\
&\quad + \int_0^t \int_V \left[\rho v_i v^*_{ik}\right]_{t_1=0}^{t} dV(r) - \int_0^t \int_V \rho v^*_{ik} F_i\, dV(r)\,dt_1
\end{aligned} \tag{14}$$

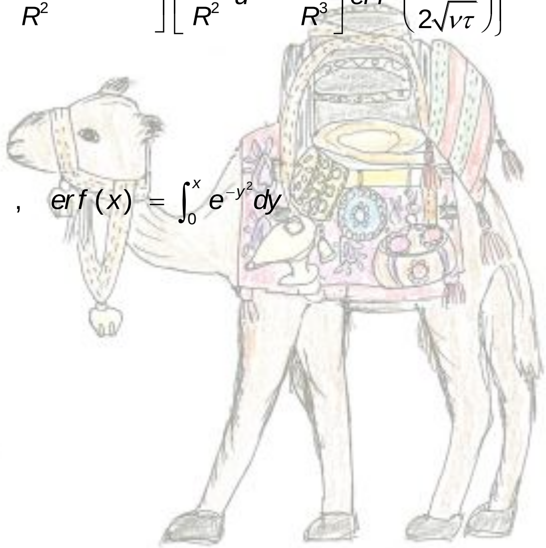
非定常 Stokes 流的基本解如下

$$v^*_{ik} = \frac{-1}{8\pi^{3/2}\rho}\left\{ \begin{aligned} &\left[\hat{\delta}_{ik} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{R^2}\right]u^* \\ &+\left[\hat{\delta}_{ik} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{R^2}\right]\left[\frac{2\nu\tau}{R^2}u^* - \frac{R^4}{R^3}\right] erf\left(\frac{R}{2\sqrt{\nu\tau}}\right) \end{aligned} \right\} \qquad (15)$$

$$p^*_k = -\frac{x_k - y_k}{4\pi R^5}\delta(\tau) \qquad (16)$$

$$u^* = \frac{1}{(\nu\tau)^{3/2}} erf\left(-\frac{R^2}{4\nu\tau}\right) \quad , \quad erf(x) = \int_0^x e^{-y^2} dy$$

Erf(x)為誤差函數，$\tau = t - t_1$。



載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈